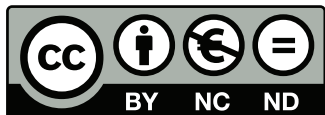
Episódios de Análise Complexa, 2015

João Pedro Boavida

APRESENTAÇÃO

Estes apontamentos foram sendo escritos ao longo dos semestres em que dei Análise Complexa e Equações Diferenciais no IST/TagusPark. Na terceira iteração, decidi separar a análise complexa das equações diferenciais, e ajustar a ordenação da análise complexa. Nesta (a quarta), acrescentei alguns tópicos, figuras e correções. Poderão encontrar informação atualizada em `http://web.tecnico.ulisboa.pt/joao.boavida/2015/ACED/`.

Quis que o resultado final ficasse relativamente curto, pois é fácil ser-se inundado com imensa informação e perder de vista as ideias centrais. Assim, tentei evitar detalhes exagerados e deixei alguns tópicos para os exercícios (isto não significa que esses tópicos são menos importantes; só significa que explicar os detalhes por escrito não ia acrescentar muito àquilo que conseguiriam fazer sozinhos, seguindo os passos sugeridos.)

À falta de melhor nome, chamei "episódio" a cada conjunto de apontamentos, correspondente a cerca de uma semana de aulas. Tentei escrever informalmente, como se estivéssemos a conversar (daí usar o plural da primeira pessoa). Como não é um monólogo, como a ideia é que participem ativamente na viagem, deixei algumas perguntas e exercícios pelo caminho. Quando algum exercício for inesperadamente exigente, eu assinalo-o com $\star$.

É tradicional apresentar as coisas pela ordem "lógica", nunca avançando sem ter justificado todos os passos anteriores e apresentado todas as definições necessárias para os passos seguintes. Na minha opinião, a única coisa que se "ganha" com essa ordem é esperar eternidades até sequer percebermos qual é o destino, e muito menos por que razão alguém quer ir para lá. Ao fim de algum tempo, já quase ninguém percebe o que se está a fazer e a vontade de continuar é cada vez menos. Assim, às vezes eu começo "pelo fim", para dar desde logo uma ideia do estilo de raciocínio que depois exploramos com mais calma.

Por outro lado, tirando quando muito a ordenação, nada do que aqui lerem é original; estas ideias já estavam arrumadas, aproximadamente no formato atual, há mais de meio século.

A ANÁLISE COMPLEXA resume-se a poucas ideias simples, mas que interagem de formas surpreendentes.

Tudo começa com a definição de números complexos, que devem ser vistos como uma extensão dos reais, mas com um número adicional i satisfazendo $i^2 + 1 = 0$. No início do episódio 1, revemos rapidamente o que se passa. Como veremos no episódio 2, as derivadas e primitivas comportam-se, pelo menos à primeira vista, como no cálculo com variáveis reais.

Mas na análise complexa estamos sobretudo interessados nas funções diferenciáveis não só num ponto a, mas numa vizinhança desse ponto; nesse caso, dizemos que a função é *holomorfa* no ponto a. Uma *singularidade* é um ponto na fronteira do domínio, ou onde a função não é diferenciável (para já, esta definição serve). Por exemplo, a função

$$f : z \mapsto \frac{1}{z\,(1-z)}$$

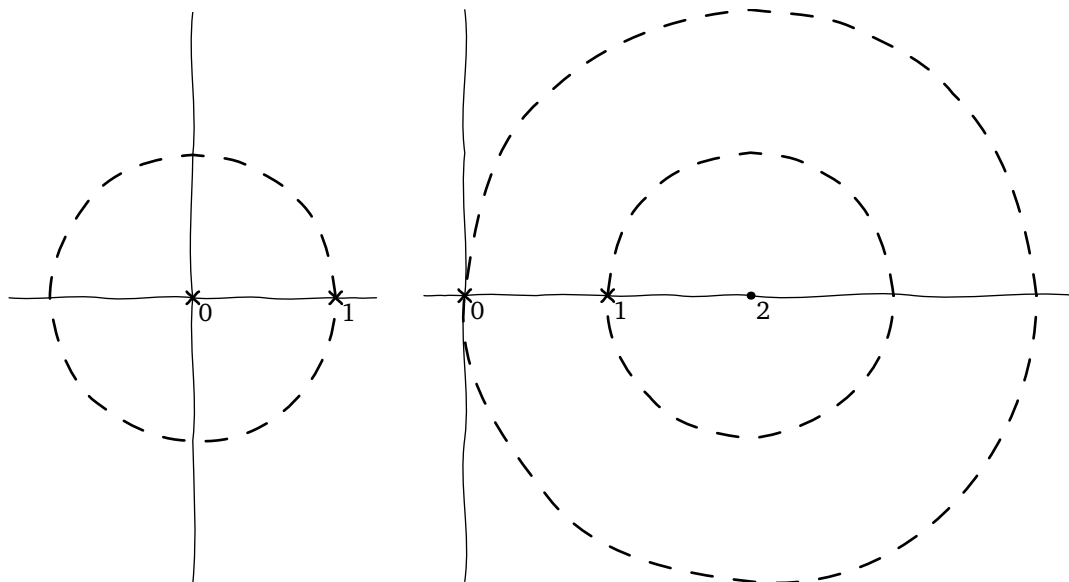
é diferenciável em quase todos os pontos, mas tem singularidades em 0 e 1. Na maioria dos casos vamos lidar com *singularidades isoladas* (isto é, com uma vizinhança na qual não há mais singularidades).

Também estamos interessados nas funções *analíticas*, ou seja, aquelas que podem ser expressas usando uma série de potências da forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n (z-a)^n$$

convergente num conjunto com interior não vazio. (Neste caso, dizemos que se trata de uma série de potências de $(z-a)$, ou, mais informalmente, uma série de potências centrada em a.) Notem que os expoentes têm de ser inteiros, mas podem perfeitamente ser negativos. Quando não há expoentes negativos, dizemos que temos uma *série de Taylor*. Quando há, dizemos que é uma *série de Laurent*.

A primeira surpresa é que as funções holomorfas coincidem com as funções analíticas. Mais concretamente, se f for uma função holomorfa em todos os pontos de $r < |z-a| < R$ (ou seja, não há singularidades entre as duas circunferências), então existe uma série de potências centrada em a e que converge nessa região. No caso de uma série de Taylor, podemos usar uma região da forma $|z-a| < R$, o raio R da maior região possível (desse formato) é o *raio de convergência*. (Talvez se recordem, do cálculo, que é possível determinar a raio de convergência a partir dos coeficientes u_n.)

Por exemplo, a função f que usámos acima tem singularidades em 0 e 1. Se quisermos séries de potências de z para f, as regiões de convergência serão centradas em 0, e podemos escolher entre duas: $\{z : 0 < |z| < 1\}$ ou $\{z : |z| > 1\}$. Mas se quisermos potências de $z-2$, as regiões de convergência serão centradas em 2 e podemos escolher entre três: $\{z : |z-2| < 1\}$, $\{z : 1 < |z-2| < 2\}$, ou $\{z : |z-2| > 2\}$. Vamos passar quase todo o

episódio 1 a determinar séries de potências para funções deste género.

Um facto conveniente é que, no interior da região de convergência de uma série de potências, podemos diferenciá-la ou primitivá-la termo-a-termo, e a região de convergência da nova série é a mesma, exceto quando muito que pode ganhar ou perder pontos na fronteira.

Como as funções holomorfas são as funções analíticas, isto significa que as funções holomorfas são sempre diferenciáveis (tantas vezes quantas queiramos) e primitiváveis (tantas vezes quantas queiramos).

O *princípio da identidade* é outro facto conveniente. Se tivermos um aberto Ω conexo por arcos, uma sucessão (sem termos repetidos) $u_n \in \Omega$ com limite em Ω, e duas funções f e g holomorfas em Ω com $f(u_n) = g(u_n)$, então as duas funções coincidem em todos os pontos de Ω. Por exemplo, se tivermos duas funções f e g holomorfas em $\mathbb{C}$ e com os mesmos valores ao longo da reta real, então $f = g$.

No episódio 2, vamos ver como isto nos leva ao *teorema de Cauchy* (o integral de uma função holomorfa ao longo de e na região contornada por um caminho fechado é 0), ao *teorema dos resíduos* (se a região só contiver singularidades isoladas, o integral baseia-se nos chamados *resíduos* de cada singularidade) e à fórmula de Cauchy (em certos casos muito frequentes, o resíduo baseia-se no valor da função ou das suas derivadas).

Até esse ponto, teremos feito tudo apenas com funções racionais (isto é, quocientes de polinómios). Naturalmente, também queremos contar com exponenciais, logaritmos, e funções trigonométricas. Discutimo-las no episódio 3.

No episódio 4 vamos (finalmente) estudar as propriedades das funções holomorfas, com especial atenção ao que se passa com os integrais de caminhos fechados para justificar o teorema de Cauchy, o teorema dos resíduos, e a fórmula de Cauchy. No episódio 5, vemos como essa informação nos permite mostrar que as funções holomorfas são analíticas.

Uma última surpresa (muito conveniente) da análise complexa é que todas as singularidades isoladas são causadas por divisões por zero. No episódio 6, falamos disso e vemos um pouco da geometria das funções em $\mathbb{C}$, incluindo uma breve discussão sobre a esfera de Riemann e as transformações de Möbius, e alguns exemplos de funções com cortes no domínio. O episódio 7 é inteiramente dedicado a várias aplicações do teorema dos resíduos ao cálculo de integrais reais.

João Pedro Boavida <joao.boavida@tecnico.ulisboa.pt>,
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico,
Universidade de Lisboa,
Setembro de 2015

CONTEÚDO

EPISÓDIO 1

NÚMEROS COMPLEXOS E SÉRIES GEOMÉTRICAS

Um ponto chave da análise complexa é que as funções em que estamos interessados são *analíticas*, ou seja, podem ser representadas por séries de potências. O nome é um vestígio de tempos em que se pensava que todas as funções relevantes para a análise têm séries de potências; isso é verdade em $\mathbb{C}$, mas não em $\mathbb{R}$.

Essas séries de potências convergem no interior de discos ou coroas circulares com fronteiras nas singularidades.

Neste episódio, vamos ver (ou rever) a aritmética em $\mathbb{C}$ e algumas ideias sobre séries *numéricas* e determinar séries de potências para funções algébricas.

(1.1) Os NÚMEROS COMPLEXOS devem ser vistos como polinómios de coeficientes reais na variável i, com a simplificação $i^2+1=0$. Como $i^2+1=0$, onde esteja i^2 podemos substituir -1. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(10-4i)(7+30i) &= 10\cdot 7+10\cdot 30i-4i\cdot 7-4i\cdot 30i = 70+300i-28i-120i^2\\ &= 70+272i-120(-1) = 190+272i.\end{aligned}$$

Escrever z na *forma cartesiana* (ou em *coordenadas cartesianas*) é escrevê-lo como $x+iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Na prática, é comum assumir que $x+iy$ está na forma cartesiana (ou seja, que esses x e y são reais), mesmo quando tal não é dito.

O conjunto dos números complexos é designado $\mathbb{C}$. Se $z \in \mathbb{C}$, o seu *conjugado* (escrito $\overline{z}$) é o número que se obtém de z trocando i por $-i$. Assim, se $z = x+iy$ está escrito na forma cartesiana, temos $\overline{z} = x - iy$. Além disso, $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2$ é o quadrado da norma do vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Essa observação permite-nos calcular o quociente de dois números complexos:

$$\frac{10-4i}{7-30i} = \frac{(10-4i)(7+30i)}{(7-30i)(7+30i)} = \frac{190+272i}{7^2+30^2} = \frac{190}{949}+\frac{272}{949}i.$$

Três funções que vamos usar frequentemente: o *módulo* de z é $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, a *parte real* de z é $\operatorname{Re} z = x$, e a *parte imaginária* de z é $\operatorname{Im} z = y$. (Alguns livros usam $\Re z$ e $\Im z$ em vez de $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$.) Os números reais são assim os complexos cuja parte imaginária é 0, enquanto que os *imaginários puros* (ou simplesmente *imaginários*) são os complexos cuja parte real é 0.

(1.2) *Exercício.* Fixamos $a = -5+i$ e $b = 2+i$. (Nesta pergunta, queremos as respostas na forma cartesiana, ou seja, queremos simplificar "até ao fim".)

(a) Calculem $\overline{a}$, $\overline{b}$, $a+b$, $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a+b}$. Conseguem mostrar que $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$ para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$? E quanto a $\overline{z-w}$, o que podem concluir?

(b) Calculem ab, $\overline{a}\,\overline{b}$, $\overline{ab}$, $|a|$, $|b|$, $|ab|$. Conseguem mostrar que $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ e $|zw| = |z|\,|w|$ para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$?

(c) Calculem a/b, $\overline{a}/\overline{b}$, $\overline{a/b}$, $|a/b|$. Conseguem mostrar que $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ e $|z/w| = |z|/|w|$ para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$?

(d) Calculem ainda a^2, a^2b, e a^2/b.

(1.3) É comum chamar *plano complexo* ao conjunto $\mathbb{C}$, pois podemos pensar num número complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ como equivalente ao vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Desta forma, a soma de complexos corresponde à soma de vetores. Se usarmos (só por um momento) $\mathbf{z}$ para indicar o vetor de $\mathbb{R}^2$ correspondente ao complexo $z \in \mathbb{C}$, podemos verificar que $|z| = \|\mathbf{z}\|$ (façam-no!). Assim, a partir da desigualdade triangular de $\mathbb{R}^2$ (se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, então $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$) obtemos imediatamente a *desigualdade triangular* de $\mathbb{C}$: se $a, b \in \mathbb{C}$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.

A mesma ideia permite-nos tratar funções $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como se fossem funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Por exemplo, se a função f é definida por $f(z) = 3i + (2 + i)z$, temos

$$\underbrace{f(x+iy)}_{f(z)} = 3i + (2+i)(x+iy) = 3i + (2x + 2iy + ix + i^2y) = \underbrace{(2x-y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(3+x+2y)}_{v(x,y)}.$$

Podemos decompor f em parte real e parte imaginária (é tradicional escrever $f = u + iv$) e podemos até pensar em f como correspondente a uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (2x - y, 3 + x + 2y)$.

Aproveito para explicar uma notação que podem não ter visto. Falando corretamente, a função acima é a função f (e não $f(z)$). Em vez de algo como "a função f definida por $f(z) = 3i + (2 + i)z$", é bastante mais prático dizer "a função $f : z \mapsto 3i + (2 + i)z$". Isto até nos permite falar de funções sem termos de lhes dar um nome (como em "a função $z \mapsto 3i + (2 + i)z$").

(1.4) *Exercício.* Quais as partes real e imaginária de cada uma das seguintes funções? (Aqui, $z = x + iy$ é a forma cartesiana de z e queremos apresentar todas as respostas como funções de x e y.) Quais as funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondentes?

(a) $z \mapsto iz$; (b) $z \mapsto z^2$; (c) $z \mapsto z^3$; (d) $z \mapsto \overline{z}$;

(e) $z \mapsto \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; (f) $z \mapsto \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; (g) $z \mapsto \dfrac{1 + 2\overline{z}}{z}$; (h) $z \mapsto \dfrac{3}{z} + \dfrac{\overline{z}}{2 + i}$.

(1.5) UMA SÉRIE é uma sucessão de somas de termos consecutivos (de outra sucessão). Porém, a expressão é usada de forma flexível, e tipicamente estamos interessados tanto nas parcelas como no limite.

Por exemplo, se $u_n = 1/2^n$, podemos considerar a sucessão das *somas parciais*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}.$$

A *soma da série* é o limite das somas parciais, ou seja, definimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Se $S_N \to L$, dizemos que a série converge para L e escrevemos $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = L$.

Se quisermos referir-nos apenas ao limite da série, escrevemos apenas "$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$". Porém, se falarmos na "série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$", estamos a referir-nos também ao *termo geral* u_n, a partir do qual a série é construída. Só porque duas séries têm o mesmo limite, não dizemos que são a mesma série (a não ser que as parcelas sejam realmente iguais, e estejam pela mesma ordem). Por uma questão de legibilidade, por vezes omitimos os extremos de n na notação da série, desde que não precisemos de os usar e não haja risco de confusão.

Mas qual é a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$?

(1.6) *Exercício.* Fixado $r \in \mathbb{C}$, a *série geométrica de razão* r é $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. As somas parciais são $S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n$.

(a) Quem é $S_N - rS_N$? Simplifiquem a resposta tanto quanto possível.

(b) Claramente,

$$S_N = \frac{(1-r)S_N}{1-r} = \frac{S_N - rS_N}{1-r}.$$

(Para todos os valores de r?) Substituindo a resposta anterior nessa identidade, obtenham uma expressão simples para S_N.

(c) Se $|r| < 1$, qual o limite de S_N? Quem é então $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$? Conseguem perceber o que se passa se $|r| \geq 1$?

(1.7) *Exercício.* Calculem

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$.

(1.8) *Exercício.* Considerem a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ de termo geral u_n e as suas somas parciais $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. Suponham que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge para $L \in \mathbb{C}$.

(a) Mostrem que $u_n = S_n - S_{n-1}$. (Há alguma restrição? Faz diferença em algum dos passos seguintes?)

(b) Determinem $\lim_{n\to\infty} S_n$ e $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$.

(c) O que podem concluir sobre $\lim_{n\to\infty} u_n$?

(d) Mostrem que a série geométrica de razão r converge se e só se $|r| < 1$.

(1.9) Séries baseadas na série geométrica. Acabámos assim de ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{desde que } |z| < 1.$$

É a nossa primeira série de potências e vai servir de protótipo para todas as outras.

E se quisermos uma série para $1/(1-z)$, mas convergindo em $|z| > 1$? Bom, essa condição é equivalente a $|1/z| < 1$. Reescrevamos a função:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z\,(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n, \quad \text{desde que } \Big|\frac{1}{z}\Big| < 1.$$

É precisamente o que procurávamos.

(Frequentemente, estamos interessados em coeficientes específicos da série. Nesse caso, interessa-nos simplificar as potências da variável, assim:

$$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Se quiseremos o coeficiente de z^{-4} começamos por comparar as potências, *ignorando os coeficientes*:

$$z^{-4} = \frac{1}{z^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad -4 = -(n+1) \quad\Rightarrow\quad n = 3,$$

e lemos o coeficiente com $n = 3$, que é 1. Se quisermos o coeficiente de z^7:

$$z^{7} = \frac{1}{z^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad 7 = -(n+1) \quad\Rightarrow\quad n = -8,$$

vemos que o coeficiente é 0, pois $n = -8$ está fora dos limites da série.)

E se quisermos séries de potências de $z-3$? Pomos $w = z-3$ e fazemos uma mudança de variável. (De contrário, facilmente nos perdemos nas contas.) Ficamos com $z = w+3$ e

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(w+3)} = \frac{1}{-2-w}.$$

Aqui, podemos escolher entre pôr -2 em evidência, ou $-w$. Tentemos com -2:

$$\frac{1}{-2-w} = \frac{1}{-2}\,\frac{1}{1+\frac{w}{2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-\frac{w}{2})} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{w}{2}\Big)^n, \quad \text{desde que } \Big|-\frac{w}{2}\Big| < 1.$$

Essa desigualdade é equivalente a $|w| < 2$. Mudando tudo de volta para z, concluímos que

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-3}{2}\Big)^n, \quad \text{desde que } |z-3| < 2.$$

E quais são as singularidades da função? Há só uma, em $z = 1$, e fica precisamente na fronteira de $|z-3| < 2$.

Mais geralmente, temos frequentemente uma situação do género

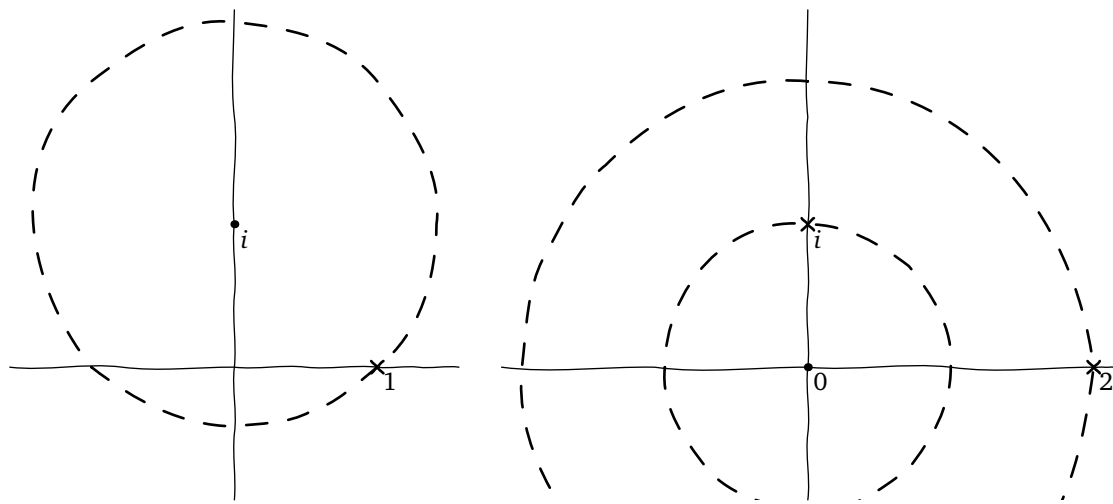
$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A}\,\frac{1}{1+\frac{B}{A}} = \frac{1}{A}\,\frac{1}{1-(-\frac{B}{A})} = \frac{1}{A}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{B}{A}\Big)^n, \quad \text{desde que } \Big|-\frac{B}{A}\Big| < 1,$$

com a condição de convergência equivalente a $|B| < |A|$. Ou seja: o termo que pusermos em evidência será, na região de convergência, o maior dos dois (em módulo).

(1.10) *Exercício.* Experimentem agora pôr $-w$ em evidência e obtenham a série de potências convergente em $|z-3|>2$.

(1.11) *Exercício.* Qual o w apropriado se quiseremos séries de potências de $z-2$? Qual a série convergente em $|z-2|<1$? E em $|z-2|>1$?

(1.12) *Exercício.* E se quisermos séries de potências de $z-1$? Quais as regiões de convergência possíveis? Quais as séries correspondentes? (Não se ponham a fazer contas.)

(1.13) *Exercício.* E se quiseremos séries de potências de $z-i$? Quais as regiões de convergência possíveis? Quais as séries correspondentes?

(1.14) Obtemos agora séries de potências de z para a função

$$f : z \mapsto \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-i}.$$

Para a primeira parcela, as regiões de convergência disponíveis são $\{z : |z| < 2\}$ ou $\{z : |z| > 2\}$. Se escolhermos a primeira região, temos $|z| < |-2|$, e por isso pomos -2 em evidência (pois pomos em evidência o termo que tem maior módulo na região que queremos). Obtemos

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2}\,\frac{1}{\frac{z}{-2}+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n, \quad \text{desde que } |z|<2.$$

Para a segunda parcela, as regiões de convergência disponíveis são $\{z : |z| < 1\}$ ou $\{z : |z| > 1\}$ (veem porquê?). Se escolhermos a segunda, temos $|z| > |-i|$, e por isso pomos z em evidência. Obtemos

$$\frac{2}{z-i} = \frac{2}{z}\,\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{z}\Big)^n, \quad \text{desde que } |z|>1.$$

Combinando as duas parcelas, obtemos a série

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{i}{z}\Big)^n, \quad \text{válida se } |z| < 2 \text{ e } |z| > 1.$$

(Ou seja, a região de convergência é $\{z : 1 < |z| < 2\}$.) Se quiséssemos analisar os coeficientes, teríamos mais uma vez de simplificar as potências de z, ficando com

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}.$$

Neste formato, é fácil ler, por exemplo, que o coeficiente de z^4 (com contribuição de $4 = n$ da primeira série e sem contribuição da segunda série) é $-1/2^5$ e que o coeficiente de z^{-9} (sem contribuição da primeira série e com contribuição de $9 = n+1$ ou $n = 8$ da segunda) é $2i^8$.

Se quiséssemos a série de potências para f convergente em $\{z : |z| < 1\}$, escolheríamos séries de potências para cada parcela compatíveis com essa condição ($\{z : |z| < 2\}$ para a primeira parcela, e $\{z : |z| < 1\}$ para a segunda). E se quiséssemos a série convergente em $\{z : |z-1| > \sqrt{2}\}$ (façam o desenho com o centro em 1 e as singularidades!), escolheríamos $\{z : |z-1| > 1\}$ para a primeira parcela e $\{z : |z-1| > \sqrt{2}\}$ para a segunda.

(1.15) *Exercício.* Quais as séries de potências para f em cada uma das regiões?

(a) $\{z : |z| < 1\}$; (b) $\{z : |z| > 2\}$; (c) $\{z : |z-1| < 1\}$;
(d) $\{z : 1 < |z-1| < \sqrt{2}\}$; (e) $\{z : |z-1| > \sqrt{2}\}$; (f) $\{z : 0 < |z-i| < \sqrt{5}\}$;
(g) $\{z : |z-i| > \sqrt{5}\}$; (h) $\{z : 0 < |z-2| < \sqrt{5}\}$; (i) $\{z : |z-2| > \sqrt{5}\}$.

Para cada uma das séries, qual o coeficiente correspondente ao expoente -1 (isto é, qual o coeficiente de z^{-1}, $(z-1)^{-1}$, $(z-i)^{-1}$, ou $(z-2)^{-1}$, conforme os casos)? Notem que nalguns casos há duas contribuições.

(1.16) *Exercício.* Quais as séries de potências para

$$z \mapsto \frac{1}{2z+1}$$

em cada uma das regiões?

(a) $\{z : |z| < \frac{1}{2}\}$; (b) $\{z : |z| > \frac{1}{2}\}$; (c) $\{z : |z-1| < \frac{3}{2}\}$;
(d) $\{z : |z-1| > \frac{3}{2}\}$; (e) $\{z : |z+\frac{1}{2}| > 0\}$; (f) $\{z : |z-i| > \frac{\sqrt{5}}{2}\}$.

(1.17) Mas nem sempre as funções são apresentadas convenientemente decompostas em frações simples. Como obter séries de potências para a função

$$g : z \mapsto \frac{1}{z(1-z)}?$$

Alguns casos são relativamente fáceis. A série convergente em $\{z : 0 < |z| < 1\}$ é

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}.$$

Da mesma forma, a série convergente em $\{z : |z| > 1\}$ é

$$\frac{1}{z\,(1-z)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{-z}\,\frac{1}{\frac{1}{-z}+1} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}.$$

(1.18) *Exercício.* Quais são as séries para g convergentes em $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$ e $\{z : |z-1| > 1\}$? (Não se esqueçam de mudar para a variável $w = z-1$, e no fim mudar de volta para z.) Qual o coeficiente de $(z-1)^{-1}$ em cada uma das séries?

(1.19) *Exercício.* Tendo em conta que

$$g(z) = \frac{1}{z\,(1-z)} = \frac{(1-z)+z}{z\,(1-z)} = \frac{1-z}{z\,(1-z)} + \frac{z}{z\,(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z},$$

determinem as séries de potências para g convergentes nas seguintes regiões:

(a) $\{z : |z-2| < 1\}$; (b) $\{z : 1 < |z-2| < 2\}$; (c) $\{z : |z-2| > 2\}$;
(d) $\{z : |z-3| < 2\}$; (e) $\{z : 2 < |z-3| < 3\}$; (f) $\{z : |z-3| > 3\}$;
(g) $\{z : |z-i| < 1\}$; (h) $\{z : 1 < |z-i| < \sqrt{2}\}$; (i) $\{z : |z-i| > \sqrt{2}\}$.

(Podem aproveitar muitas das contas de (1.9) e dos exercícios que se lhe seguem.) Para cada uma das séries, qual o coeficiente correspondente ao expoente -1 (isto é, qual o coeficiente de $(z-2)^{-1}$, $(z-3)^{-1}$, ou $(z-i)^{-1}$, conforme os casos)?

(1.20) A DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS permite-nos usar a mesma estratégia com outras funções. Vamos ilustrar o princípio geral com um exemplo. Consideremos a função algébrica

$$h : z \mapsto \frac{-4z+5}{(z^2+5z)\,z}.$$

Só podemos avançar se o grau do numerador for menor que o do denominador e o denominador estiver fatorizado em fatores "primos entre si" (isto é, sem divisores comuns—havemos de mostrar que em $\mathbb{C}$ isto é o mesmo que não terem raízes em comum). Como 0 é raiz tanto de z^2+5z como de z, reescrevemos a fração ligeiramente:

$$\frac{-4z+5}{(z^2+5z)\,z} = \frac{-4z+5}{z^2\,(z+5)}.$$

Embora não seja óbvio, o numerador pode ser reescrito:

$$\frac{-4z+5}{z^2\,(z+5)} = \frac{z^2+(z+5)(-z+1)}{z^2\,(z+5)} = \frac{1}{z+5} + \frac{-z+1}{z^2}.$$

Reparem que nas novas frações o grau do numerador também é menor que o do denominador. Podemos *sempre* fazer algo parecido, *desde que* os polinómios em denominador sejam primos entre si (*não* vamos provar esta afirmação, que é uma generalização do algoritmo de Euclides que alguns de vocês conhecem). Mas ainda podemos simplificar mais, pois

$$\frac{1}{z+5} + \frac{-z+1}{z^2} = \frac{1}{z+5} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

(1.21) *Exercício.* Tendo em conta a decomposição que acabámos de obter, quais as séries de potências para h convergentes em $\{z : 0 < |z| < 5\}$ e $\{z : |z| > 5\}$? Quais os coeficientes de z^{-1}, z^{-5} e z^6 em cada uma das séries?

(1.22) Vejamos mais um exemplo, para percebermos melhor o que acontece quando os fatores do denominador têm grau maior que 1. Temos

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2(z+1)^2} = \frac{(2z-1)z^2 + (z-1)(z+1)^2}{z^2(z+1)^2} = \frac{2z-1}{(z+1)^2} + \frac{z-1}{z^2}.$$

(Reparem que em todas as frações o grau do numerador é menor que o do denominador, e que z^2 e $(z+1)^2$ não têm zeros em comum.) A segunda parcela é fácil de simplificar ainda mais, mas o que fazer com a primeira? Só desta vez, façamos a mudança de variável $w = z + 1$ e $z = w - 1$. A primeira parcela fica

$$\frac{2z-1}{(z+1)^2} = \frac{2(w-1)-1}{w^2} = \frac{2w-3}{w^2} = \frac{2}{w} - \frac{3}{w^2} = \frac{2}{z+1} - \frac{3}{(z+1)^2}.$$

Assim, a expressão original pode ser reescrita como

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2(z+1)^2} = \frac{2z-1}{(z+1)^2} + \frac{z-1}{z^2} = \frac{2}{z+1} - \frac{3}{(z+1)^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

Resumindo, podemos escolher entre dois formatos,

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'z+B'}{(z+1)^2} + \frac{C'z+D'}{z^2},$$

conforme o que nos dê mais jeito.

Mas como descobrimos os coeficientes? Na prática, começamos pela expressão final

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2(z+1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z^2}$$

e resolvemos em ordem às constantes. Por exemplo, se reduzirmos ao mesmo denominador ficamos com

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2(z+1)^2} = \frac{A(z+1)z^2 + Bz^2 + C(z+1)^2 z + D(z+1)^2}{z^2(z+1)^2}.$$

Se duas frações com o mesmo denominador são iguais, é porque os numeradores são iguais. Assim, temos esta igualdade de polinómios:

$$3z^3 - z - 1 = A(z+1)z^2 + Bz^2 + C(z+1)^2 z + D(z+1)^2.$$

Se dois polinómios são iguais, os seus valores (no mesmo ponto) também são iguais. Substituindo em quatro pontos diferentes (por exemplo, $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$, e $z = -2$), obtemos:

$$-1 = D; \qquad -3 = B;$$
$$1 = 2A + B + 4C + 4D; \qquad -23 = -4A + 4B - 2C + D.$$

Notem a simplificação substancial nos pontos correspondentes a zeros do denominador. Ao resolver o sistema, chegamos a $D = -1$, $B = -3$, $A = 2$, $C = 1$.

(1.23) *Exercício.* Decomponham

$$\frac{2z+\frac{i}{2}-6}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

em frações parciais e determinem as séries de potências de z para essa função. Quais as regiões de convergência dessas séries? Qual o coeficiente de z^{-1} em cada uma delas?

(1.24) *Exercício.* Determinem a decomposição de

$$f : z \mapsto \frac{3z+iz-4i-2}{(z-2)(z-i)}$$

em frações parciais e usem-na para encontrar as séries de potências de $(z-1)$ para f (indiquem também as respetivas regiões de convergência). Quais os coeficientes de $(z-1)^2$ e $(z-1)^{-1}$ em cada uma dessas séries?

(1.25) *Exercício.* Decomponham

$$\frac{-4z+3}{z\,(z-i)(2z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{2z+1} + \frac{D}{(2z+1)^2}$$

em frações parciais e determinem as séries de potências de $z+\frac{1}{2}$ para essa função. Quais as regiões de convergência dessas séries? Qual o coeficiente de $(z+\frac{1}{2})^{-1}$ em cada uma delas?

(1.26) *Exercício.* Vejamos outro procedimento para obter a decomposição em frações parciais quando o denominador está totalmente fatorizado e tem grau maior que o do denominador. Considerem

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha)^{\ell}\,R(z)}, \quad \text{onde } P(\alpha), R(\alpha) \neq 0.$$

(a) Mostrem que é possível escrever

$$\frac{P(z)}{R(z)} = \frac{P(\alpha)}{R(\alpha)} + \frac{g(z)}{R(z)},$$

onde $g(z)$ é um polinómio de grau menor que o do denominador original.

(b) Mostrem que $g(\alpha) = 0$ e que $g(z) = (z-\alpha)\,Q(z)$, onde $Q(z)$ é um polinómio.

(c) Verifiquem que

$$f(z) = \frac{P(\alpha)/R(\alpha)}{(z-\alpha)^{\ell}} + \frac{Q(z)}{(z-\alpha)^{\ell-1}\,R(z)}.$$

A partir daqui, conseguem criar um processo iterativo para decompor $f(z)$ em frações parciais?

(1.27) Séries obtidas por derivação. Imaginem que querem uma série de potências para

$$f : z \mapsto \frac{1}{(2z+1)^2}$$

convergente em $|z| < \frac{1}{2}$. (Se forem verificar, reparam que evitámos casos destes até aqui.)

A princípio, ignoramos o expoente:

$$\frac{1}{2z+1} = \frac{1}{1-(-2z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n.$$

("Pusemos" 1 em evidência, pois na região de convergência que queremos, $|1| > |2z|$.) Agora, derivamos ambos os membros da igualdade e, *sem nos preocuparmos para já com a legimitidade deste passo*, derivamos a série termo a termo:

$$\left(\frac{1}{2z+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)^n z^n)'.$$

Obtemos assim

$$-\frac{2}{(2z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n n z^{n-1},$$

levando-nos a concluir que

$$f(z) = \frac{1}{(2z+1)^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^m (m+1) z^m, \quad \text{desde que } |z| < \tfrac{1}{2}.$$

No último passo (opcional), ignorámos $n = 0$ (pois o coeficiente respetivo é 0) e mudámos o índice para $m = n - 1$ (na prática, ajustamos os índices sem mudar o nome, já que são variáveis mudas).

(1.28) *Exercício.* Usem a mesma estratégia (sem se preocuparem com a justificação) para encontrar as séries para f convergentes em

(a) $\{z : |z| > \frac{1}{2}\}$; (b) $\{z : |z-i| < \frac{\sqrt{5}}{2}\}$; (c) $\{z : |z-i| > \frac{\sqrt{5}}{2}\}$.

Qual o coeficiente de z^{-1} ou $(z-i)^{-1}$ (conforme os casos) em cada série?

(1.29) *Exercício.* Voltemos à função h em (1.20)

$$\frac{-4z+5}{(z^2+5z)\,z} = \frac{1}{z+5} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Quais as séries de potências de $(z+5)$ para h? Quais as respetivas regiões de convergência? Qual o coeficiente de $(z+5)^{-1}$ em cada série?

(1.30) *Exercício.* Voltemos também à função

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2 (z+1)^2}$$

de (1.22). Quais as séries de potências de z, de $(z+1)$ e de $(z+i)$ para essa função? Quais as respetivas regiões de convergência? Qual o coeficiente de expoente -1 em cada série?

(1.31) Produto de séries. Para funções racionais, os métodos que discutimos até aqui são perfeitamente suficientes. Ainda assim, às vezes o produto de séries é útil.

Digamos que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\,(z-a)^n$ e $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\,(z-b)^n$ convergem no aberto Ω. Nesse aberto, podemos escrever

$$f(z)\,g(z) = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\,(z-a)^j\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k\,(z-a)^k\Big) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_j\,v_k\,(z-a)^{j+k}.$$

Se agora fizermos uma mudança de variável para $n = j+k$ e $k = n-j$ e agruparmos de acordo com o expoente (ou seja, de acordo com $j+k=n$), chegamos a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\,(z-a)^j\,v_{n-j}\,(z-a)^{n-j} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\,v_{n-j}\Big)(z-a)^n.$$

Esta é, assim, a série para $f(z)\,g(z)$. (Vamos deixar a justificação de todas estas manipulações para mais tarde.)

Vejamos com um exemplo concreto. Em (1.27), vimos que

$$\frac{1}{2z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\,z^n, \quad \text{desde que } |z| < \tfrac{1}{2}.$$

Assim, na mesma região, temos

$$\Big(\frac{1}{2z+1}\Big)^2 = \Big(\sum_{j\geq 0}(-2)^j\,z^j\Big)\Big(\sum_{k\geq 0}(-2)^k\,z^k\Big) = \sum_n\Big(\sum_{\substack{j\geq 0\\ n-j\geq 0}}(-2)^j\,(-2)^{n-j}\Big)z^n.$$

Neste ponto, notem que os coeficientes das séries originais são não-nulos só se $j \geq 0$ e $k \geq 0$, e por isso temos de manter essa exigência. Obtemos assim as duas condições $j \geq 0$ e $n-j \geq 0$, que nos levam a $0 \leq j \leq n$. Portanto, a nossa expressão pode ser simplificada:

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{0\leq j\leq n}(-2)^{j+n-j}\Big)z^n = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{0\leq j\leq n}(-2)^n\Big)z^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)(-2)^n\,z^n$$

(no último passo usámos o facto de haver $n+1$ parcelas iguais no somatório sobre $0 \leq j \leq n$). Este é, naturalmente, o mesmo resultado que obtivemos antes.

(1.32) Respostas de exercícios.

(1.2) (a) $-5-i$; $2-i$; $-3+2i$; $-3-2i$; $-3-2i$. (b) $-11-3i$; $-11+3i$; $-11+3i$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{130}$. (c) $-\frac{9}{5}+\frac{7}{5}i$; $-\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i$; $-\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i$; $\sqrt{\frac{26}{5}}$. (d) $24-10i$; $58+4i$; $\frac{38}{5}-\frac{44}{5}i$.

(1.4) $(-y,x)$; $(x^2-y^2,2xy)$; $(x^3-3xy^2,3x^2y-y^3)$; $(x,-y)$; $(x,0)$; $(y,0)$; $\left(\dfrac{x+2x^2-2y^2}{x^2+y^2},\dfrac{-y-4xy}{x^2+y^2}\right)$; $\left(\dfrac{3x}{x^2+y^2}+\dfrac{2x-y}{5},\dfrac{-3y}{x^2+y^2}-\dfrac{x+2y}{5}\right)$.

(1.6) (a) $1-r^{N+1}$. (b) $\frac{1-r^{N+1}}{1-r}$. (c) $\frac{1}{1-r}$; $\frac{1}{1-r}$.

(1.7) (a) 2. (b) $\frac{3}{2}$. (c) 1. (d) ∞.

(1.10) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-3)^{n+1}}$.

(1.11) $w=z-2$; $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$; $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$.

(1.12) $\{|z-1|>0\}$; $-\dfrac{1}{z-1}$.

(1.13) $\{|z-i|<\sqrt{2}\}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$; $\{|z-i|>\sqrt{2}\}$; $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$.

(1.15) (a) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}$.
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$.
(c) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}}$.
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^{n+1}}$.
(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$.
(f) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}+\frac{2}{z-i}$.
(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}}+\frac{2}{z-i}$.
(h) $\dfrac{1}{z-2}-2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(i-2)^{n+1}}$.
(i) $\dfrac{1}{z-2}+2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i-2)^n}{(z-2)^{n+1}}$.

(1.16) (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nz^n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}z^{n+1}}$.
(c) $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}(z-1)^n$.
(d) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3/2)^n}{(z-1)^{n+1}}$. (e) $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{-1}$.
(f) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2}-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$.

(1.18) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}$; -1; $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}$; 0.

(1.19) (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$; 0.
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$; -1.
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-2)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$; 0.
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{2^{n+1}}$; 0.
(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-3)^{n+1}}$; -1.
(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(z-3)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-3)^{n+1}}$; 0.
(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{i^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}$; 0.
(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}$; 1.
(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}}$; 0.

(1.21) $\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-5)^n}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$; -1; 0; 5^{-7}; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$; 0; 5^4; 0.

(1.23) $\dfrac{2-(i/2)}{z-2}+\dfrac{i/2}{z-3}$;
$\dfrac{i-4}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}-\dfrac{i}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$; $\{|z|<2\}$; 0;
$\dfrac{4-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}-\dfrac{i}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$; $\{2<|z|<3\}$; $\frac{4-i}{2}$;
$\dfrac{4-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}+\dfrac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^{n+1}}$; $\{3<|z|\}$; 2.

(1.24) $\dfrac{2}{z-2}+\dfrac{i+1}{z-i}$;
$-2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{(i-1)^n}$; $\{|z-1|<1\}$;
$-\frac{5}{2}$; 0;
$2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}+i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{(i-1)^n}$;
$\{1<|z-1|<\sqrt{2}\}$; $-\frac{1}{2}$; 2;
$2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^{n+1}}+(i+1)\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$;
$\{\sqrt{2}<|z-1|\}$; 0; $3+i$.

(1.25) $\dfrac{3i}{z}+\dfrac{i}{z-i}+\dfrac{1-2i}{(z+\frac{1}{2})^2}-\dfrac{4i}{z+\frac{1}{2}}$;
$-6i\sum_{n=0}^{\infty}2^n\big(z+\tfrac{1}{2}\big)^n-i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+\frac{1}{2})^n}{(i+\frac{1}{2})^{n+1}}+$
$\dfrac{1-2i}{(z+\frac{1}{2})^2}-\dfrac{4i}{z+\frac{1}{2}}$; $\{0<|z+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$; $-4i$;
$3i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(z+\frac{1}{2})^{n+1}}-i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+\frac{1}{2})^n}{(i+\frac{1}{2})^{n+1}}+$
$\dfrac{1-2i}{(z+\frac{1}{2})^2}-\dfrac{4i}{z+\frac{1}{2}}$; $\{\frac{1}{2}<|z+\frac{1}{2}|<\frac{\sqrt{5}}{2}\}$; $-i$;
$3i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(z+\frac{1}{2})^{n+1}}+i\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i+\frac{1}{2})^n}{(z+\frac{1}{2})^{n+1}}+$
$\dfrac{1-2i}{(z+\frac{1}{2})^2}-\dfrac{4i}{z+\frac{1}{2}}$; $\{\frac{\sqrt{5}}{2}<|z+\frac{1}{2}|\}$; 0.

(1.28) (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}z^{n+2}}$; 0.

(b) $\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z-i)^{n-1}}{(-\frac{1}{2}-i)^{n+1}}$; 0.

(c) $\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(-\frac{1}{2}-i)^n}{(z-i)^{n+2}}$; 0.

(1.29) $\dfrac{1}{z+5}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+5)^n}{5^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+5)^{n-1}}{5^{n+1}}$;
$\{0<|z+5|<5\}$; 1;
$\dfrac{1}{z+5}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^n}{(z+5)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)5^n}{(z+5)^{n+2}}$;
$\{5<|z+5|\}$; 0.

(1.30)
$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nnz^{n-1}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$;
$\{0<|z|<1\}$; 1;
$2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+1}}+3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{z^{n+2}}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$;
$\{1<|z|\}$; 3;
$\dfrac{2}{z+1}-\dfrac{3}{(z+1)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$;
$\{0<|z+1|<1\}$; 2;
$\dfrac{2}{z+1}-\dfrac{3}{(z+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z+1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(z+1)^{n+2}}$;
$\{1<|z+1|\}$; 3;
$-2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{(i-1)^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+i)^{n-1}}{(i-1)^{n+1}}+$
$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{i^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+i)^{n-1}}{i^{n-1}}$; $\{|z+i|<1\}$; 0;
$-2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{(i-1)^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+i)^{n-1}}{(i-1)^{n+1}}+$
$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{(z+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)i^n}{(z+i)^{n+2}}$;
$\{1<|z+i|<\sqrt{2}\}$; 1;
$2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(i-1)^n}{(z+i)^{n+1}}-3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(i-1)^n}{(z+i)^{n+2}}+$
$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{(z+i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)i^n}{(z+i)^{n+2}}$; $\{\sqrt{2}<|z+i|\}$; 3.

DERIVADAS E PRIMITIVAS

Neste episódio, vamos resumir algumas ideias sobre derivadas e primitivas em $\mathbb{C}$. Vemos também como obter séries de Taylor, e os surpreendentes teorema de Cauchy e teorema dos resíduos, bem como a fórmula de Cauchy.

(2.1) Derivadas e funções holomorfas. Muitas das *definições* do cálculo continuam a fazer sentido em $\mathbb{C}$. Podemos continuar a falar de limites e de funções contínuas—de facto, se virmos as funções $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, não há nada a acrescentar ao que se passava em $\mathbb{R}^2$. Mas com as derivadas já há algumas surpresas.

As derivadas de funções aritméticas continuam a funcionar tal e qual como antes, pois os seus limites não envolvem quaisquer complicações. Por exemplo, se $f(z) = z^2$, a derivada de f em $z = a$ é

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{z^2 - a^2}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)(z+a)}{z - a} = \lim_{z\to a}(z + a) = 2a.$$

(2.2) *Exercício.* Fixamos as funções dadas por $g(z) = z^2 - 4z$ e $h(z) = 1/z$. Quais os valores de $g'(3)$, $g'(i)$, $g'(2+i)$, $h'(3)$, $h'(i)$, e $h'(2+i)$ em coordenadas cartesianas?

(2.3) Dizemos que uma função é *holomorfa* num ponto se for diferenciável numa vizinhança desse ponto, e que é holomorfa num conjunto se for diferenciável numa vizinhança desse conjunto. Se dissermos simplesmente que a função é holomorfa, subentendemos que é holomorfa em todo o seu domínio.

Um facto importante (que só explicaremos mais tarde): as funções holomorfas são as que podem ser expressas apenas em termos de z, sem usar $\bar{z}$, $|z|$, $x = \operatorname{Re} z$, nem $y = \operatorname{Im} z$. (Aqui é preciso algum sentido crítico: exatamente o que significa "podem ser expressas apenas em termos de z"?)

Vejamos o que se passa se $f(z) = \operatorname{Re} z$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re}(a+h) - \operatorname{Re} a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Lembram-se como lidar com limites destes em $\mathbb{R}^2$? Temos de considerar todas as formas diferentes de h se aproximar de 0, e todas têm de concordar no valor do limite. Ora, se escolhermos $h \neq 0$ real, vemos que o limite tem de ser 1; se escolhermos $h \neq 0$ imaginário, vemos que o limite tem de ser 0. Ou seja, o limite não existe e f não é diferenciável (em nenhum a).

(2.4) *Exercício.* Mantemos $f(z) = \operatorname{Re} z$ e usamos as ideias de (1.3).

(a) Se $z = x + iy$ for a forma cartesiana de z e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for a forma cartesiana de $f(z)$, quem são as funções u e v?

(b) A função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$?

(c) Já vimos que f não é diferenciável em $\mathbb{C}$. Escrevam $g : z \mapsto \operatorname{Im} z$ em termos de f. O que podem concluir sobre a diferenciabilidade de g?

(d) Usem um raciocínio semelhante para $z \mapsto \bar{z}$.

(e) Conseguem mostrar que $z \mapsto |z|$ não é diferenciável? (Podem usar a definição de derivada, ou podem aproveitar o resultado da alínea anterior.)

(2.5) *Exercício.* Há pouco, dissemos que as funções holomorfas (no seu domínio) são as que podem ser expressas apenas em termos de z, sem usar $\bar{z}$, $|z|$, $x = \operatorname{Re} z$, nem $y = \operatorname{Im} z$. Nesta pergunta, podem usar esse critério à vontade, sem se preocuparem em justificá-lo. (Além disso, $x + iy$ é sempre a forma cartesiana de z.)

(a) Mostrem como exprimir $|z|$, x, e y em termos de z e $\bar{z}$. Conseguem obter um critério mais prático para decidir se uma função é holomorfa?

(b) Mostrem que a função $x + iy \mapsto x^2 + 2ixy - y^2 - 2ix + 2y$ é holomorfa.

(c) Decidam quais destas funções são holomorfas:

$$z \mapsto z^2 + 3z; \qquad z \mapsto \frac{|z^2|}{\bar{z}}; \qquad z \mapsto z - \bar{z}; \qquad z \mapsto \frac{1}{1+z^2};$$

$$z \mapsto x^2 - y^2; \qquad z \mapsto x^2 - y^2 + 2ixy; \qquad z \mapsto \frac{x - iy}{x^2 + y^2}; \qquad z \mapsto \frac{x + iy}{x^2 + y^2};$$

$$z \mapsto ix + y; \qquad z \mapsto -x - y + ix - iy; \qquad z \mapsto \frac{1}{1 + x^2}; \qquad z \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

(2.6) *Exercício.* Se f é uma função diferenciável em a e g é uma função diferenciável em $f(a)$, mostrem que $g \circ f$ é diferenciável em a e determinem o valor da derivada. (Por outras palavras, verifiquem que a regra para a derivada da função composta também funciona em $\mathbb{C}$.)

(2.7) *Exercício.* Voltando à definição de função holomorfa em (2.1), mostrem que ser holomorfa num conjunto é o mesmo que ser holomorfa em *cada* ponto desse conjunto. (Isto não é difícil, mas também não é tão óbvio como parece. Veem porquê?)

(2.8) *Exercício.* Suponham que f é um função holomorfa no seu domínio. O domínio pode ser a reta real? Pode ser o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$? Ou $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$? Ou $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$? Ou $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$? Porquê?

(2.9) Dizemos que f tem uma *singularidade* em $z = a$ se a estiver na fronteira do maior aberto onde f é holomorfa. (Esta não é bem a definição habitual, que é um pouco mais vaga; mas serve para o que queremos.) Por exemplo, a função

$$z \mapsto \frac{1}{(z-2)(z+3)^2}$$

é holomorfa em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2, -3\}$ e tem singularidades em 2 e -3. (Neste caso, dizemos que são *singularidades isoladas*, pois $\{2, -3\}$ não tem pontos de acumulação.)

(2.10) *Exercício.* Quais as singularidades de $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$? E as de $z \mapsto \dfrac{z+\sqrt{2}}{(z^4-4)(z+i)^2}$?

(2.11) AS SÉRIES DE TAYLOR são as séries de potências sem expoentes negativos. Se assumirmos (como no fim do episódio anterior) que as séries de potências podem ser derivadas termo-a-termo, então dada uma série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(z-a)^n,$$

a sua derivada f' é

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,n\,(z-a)^{n-1}.$$

Havemos de mostrar que a região de convergência destas séries é a mesma (se ignorarmos o que se passa na fronteira).

Calculemos as derivadas explicitamente:

$$\begin{aligned}
f(z) &= u_0 + u_1\,(z-a) + u_2\,(z-a)^2 + u_3\,(z-a)^3 + u_4\,(z-a)^4 + u_5\,(z-a)^5 + \cdots\,;\\
f'(z) &= u_1 + 2u_2\,(z-a) + 3u_3\,(z-a)^2 + 4u_4\,(z-a)^3 + 5u_5\,(z-a)^4 + \cdots\,;\\
f''(z) &= 2u_2 + 3\cdot 2u_3\,(z-a) + 4\cdot 3u_4\,(z-a)^2 + 5\cdot 4u_5\,(z-a)^3 + \cdots\,;\\
f^{(3)}(z) &= 3\cdot 2u_3 + 4\cdot 3\cdot 2u_4\,(z-a) + 5\cdot 4\cdot 3u_5\,(z-a)^2 + \cdots\,;\\
f^{(4)}(z) &= 4\cdot 3\cdot 2u_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2u_5\,(z-a) + \cdots\,;\\
f^{(5)}(z) &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2u_5 + \cdots\,.
\end{aligned}$$

Substituam $z = a$ em cada uma dessas séries, de modo a ficarem só com o termo constante. Veem qual é o padrão? Obtemos $f^{(n)}(a) = u_n\,n!$. (Conseguem provar por indução que essa expressão é válida para qualquer n?)

Assim, se tivermos uma função analítica f, a sua série de potências centrada em $z = a$ (conhecida como *série de Taylor* ou, só no caso $a = 0$, *série de MacLaurin*) é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

(2.12) *Exercício. Assumindo* que estas funções são analíticas e as suas derivadas seguem as mesmas regras que no cálculo real, quais as séries de MacLaurin destas funções?

(a) $z \mapsto e^z$; (b) $z \mapsto e^{2z-1}$; (c) $z \mapsto z^2\,e^{2z-1}$; (d) $z \mapsto \sin z$; (e) $z \mapsto \cos z$.

Quais as séries de Taylor centradas em π?

(2.13) *Exercício.* Qual a série de MacLaurin de

$$z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$$

e qual a respetiva região de convergência? Qual a primitiva dessa série com valor 0 em $z = 0$? Que nome dariam à função definida por essa série?

(2.14) Integrais em $\mathbb{C}$. O passo natural seguinte é considerar integrais. Os integrais (de funções complexas) em intervalos $[a,b] \subset \mathbb{R}$ são uma extensão natural do que fazemos no caso real. Por exemplo, se u e v são funções $[a,b] \to \mathbb{R}$, *definimos*

$$\int_a^b u(t) + iv(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\,.$$

(Ou seja, limitamo-nos a insistir que o integral seja linear mesmo quando o conjunto dos escalares é alargado de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$.) Desta forma, podemos fazer

$$\int_0^1 (t + i - it)\,dt = \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 (1-t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + i\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Mas isso é para funções definidas em (um intervalo de) $\mathbb{R}$. E para funções definidas em (um aberto de) $\mathbb{C}$? Nesse caso, parece razoável decidir que só vamos definir integrais ao longo de caminhos. É provável que precisemos de hipóteses adicionais, por isso vamos assumir desde já que todos os caminhos são "suficientemente regulares". Usamos esta expressão para não nos comprometermos já com as hipóteses (quando percebermos quais devem ser, então faremos a definição "oficial").

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} : t \mapsto x(t) + iy(t)$ é um caminho (suficientemente regular) e f é uma função definida ao longo desse caminho, pomos

$$\int_\gamma f(x+iy)\,dx = \int_a^b f(\gamma(t))\,x'(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_\gamma f(x+iy)\,dy = \int_a^b f(\gamma(t))\,y'(t)\,dt\,.$$

Finalmente (e aqui já há algo de novo), definimos o integral complexo como

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

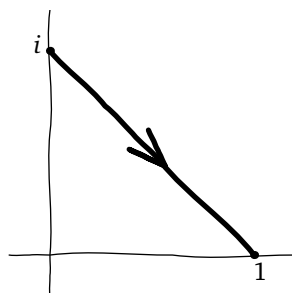
e o integral "de comprimento" como

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(z)\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

Por exemplo, fixemos $f(z) = z$ e calculemos o seu integral ao longo do caminho $\gamma : t \mapsto t + i(1-t)$ ligando $\gamma(0) = i$ a $\gamma(1) = 1$. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t + i - it)(1-i)\,dt \\ &= \int_0^1 t - it + i - i^2 - it + i^2 t\,dt = \int_0^1 1 + i - 2it\,dt \\ &= \Big[t + it - it^2\Big]_0^1 = 1 + i - i = 1.\end{aligned}$$

Aliás, até podemos apresentar as contas de forma ligeiramente diferente, se escrevermos $z = \gamma(t) = t + i(1-t)$ e $dz = d\big(t + i(1-t)\big) = (1-i)\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma z\,dz = \int_0^1 (t + i - it)(1-i)\,dt \\ &= (1-i)\int_0^1 (t + i - it)\,dt = (1-i)\left[\frac{t^2}{2} + it - \frac{it^2}{2}\right]_0^1 = (1-i)\frac{1+i}{2} = 1.\end{aligned}$$

Mas por outro lado, é bem mais tentador fazer algo como

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\text{inicial}}^{\text{final}} = \frac{1^2}{2} - \frac{i^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1.$$

Isto funciona mais geralmente. Se $f(z) = F'(z)$, então

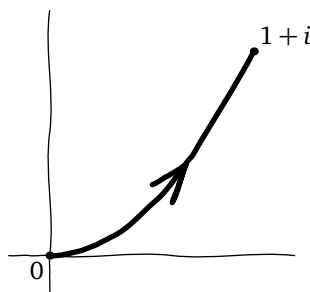
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Mas podemos escrever $F\circ\gamma$ na forma $U+iV$, onde U e V são funções reais de variável real. Ficamos portanto com

$$\begin{aligned}\int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (U+iV)'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b U'(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b V'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= U(b)-U(a)+iV(b)-iV(a) = (U+iV)(b)-(U+iV)(a) \\ &= (F\circ\gamma)(b)-(F\circ\gamma)(a) = F(\gamma(b))-F(\gamma(a)) = F(\text{final})-F(\text{inicial}).\end{aligned}$$

Resumindo, obtivemos o *teorema fundamental do cálculo* para funções holomorfas: se γ é um caminho suficientemente regular e $f = F'$ ao longo desse caminho, então

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\text{final}) - F(\text{inicial}).$$

Infelizmente, se f não tiver primitiva (ou não a conhecermos), temos de calcular o integral pela definição (isto é, usando explicitamente $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ e calculando o integral real que se obtém). Felizmente, esse caso não terá grande interesse para nós.

(2.15) *Exercício.* Calculem os integrais ao longo do caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto t + it^2$.

(a) $\displaystyle\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$; (b) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$; (c) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$; (d) $\displaystyle\int_\gamma z^3 - iz\,\mathrm{d}z\,.$

(2.16) *Exercício**. Fixemos um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Neste exercício, vamos mostrar que

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z| \le MC,$$

onde M é o máximo de $|f(z)|$ ao longo do caminho e C é o comprimento do caminho. Definimos $J = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$; é um número complexo.

(a) Mostrem a primeira desigualdade no caso $J = 0$.

(b) Se $J \neq 0$, definimos $g : z \mapsto f(z) \cdot \frac{|J|}{J}$. Mostrem que $\left|\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ e que $|g(z)| = |f(z)|$. Mostrem que para provar as desigualdades para f basta prová-las para g.

(c) Notem que $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ é um real positivo, e usem isso para mostrar

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \operatorname{Re}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Re}\int_a^b g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}\Big(g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \Big|g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\Big|\,\mathrm{d}t = \int_\gamma |g(z)|\,|\mathrm{d}z|.\end{aligned}$$

Verifiquem que cada um dos passos faz sentido e terminem a demonstração.

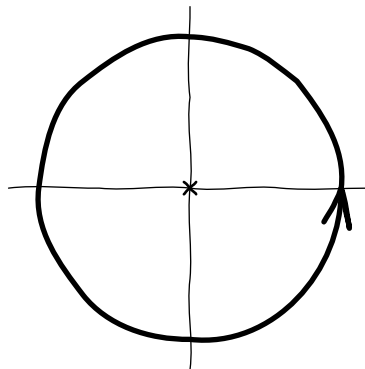
(2.17) *Exercício.* Mostrem que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

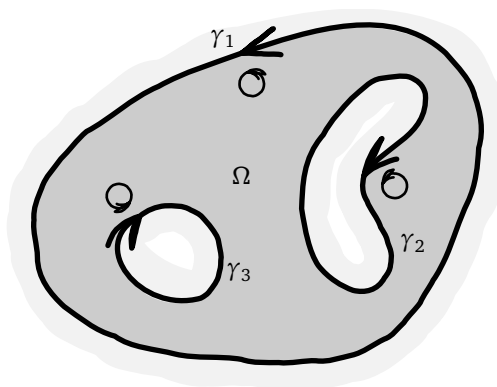
para todos os caminhos fechados γ suficientemente regulares e funções f primitiváveis (ao longo de γ).

(2.18) *Exercício.* Fixamos o caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto \cos t + i \sin t$. Comecem por mostrar que $\gamma'(t) = i\gamma(t)$. A partir daí, calculem

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Conseguem imaginar por que razão isto não contradiz o exercício anterior?

(2.19) *Exercício.* Encontrem uma parametrização para o caminho γ que percorre (no sentido positivo) a circunferência de raio $R > 0$ centrada na origem. É comum usar a notação $|z| = R$ para denotar esse caminho. Calculem

$$\int_{|z|=R} z^2 \,\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

(2.20) O TEOREMA DE CAUCHY é talvez o primeiro facto verdadeiramente inesperado sobre as funções holomorfas. O teorema diz-nos que, se o bordo $\partial\Omega$ do aberto Ω é um conjunto finito de caminhos regulares (com as orientações corretas, assinaladas com ↻) e f é holomorfa em Ω e $\partial\Omega$, então

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Um exemplo explica melhor o que queremos dizer. Se o bordo de Ω for formado por três caminhos (chamemos-lhes γ_1, γ_2 e γ_3), então o teorema diz que

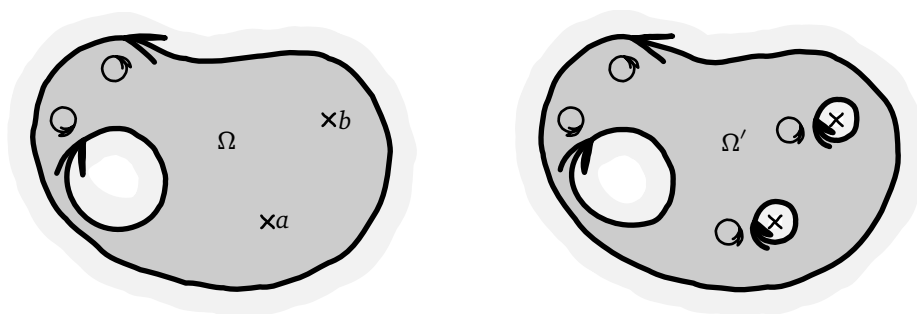
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(Para podermos usar o teorema, é preciso que f seja holomorfa em Ω e numa pequena vizinhança ao longo do bordo.) A seu tempo, veremos como demonstrar o teorema. Para já, exploremos apenas algumas consequências.

(2.21) Fixemos uma função f holomorfa em $\Omega \setminus \{a, b\}$ e ao longo de $\partial\Omega$. Escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (porquê?) e pomos $\Omega' = \{z \in \Omega : |z - a| \geq \varepsilon \text{ e } |z - b| \geq \varepsilon\}$. O bordo de Ω' consiste no bordo de Ω juntamente com os caminhos $|z - a| = \varepsilon$ e $|z - b| = \varepsilon$ percorridos no sentido oposto (porquê?). Aplicando o teorema de Cauchy a Ω' e tendo em conta a orientação dos caminhos, vemos que

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{|z-b|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ou seja, o integral original é dado por

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-b|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

No futuro veremos que, se f é holomorfa em $\{z \in \Omega : 0 < |z-a| \leq \varepsilon\}$ (notem que o a não está incluído) e tem uma singularidade (necessariamente isolada) em a, então existe um número complexo, chamado o *resíduo* de f em a e escrito $\operatorname{Res}_a f$ ou $\operatorname{Res}_{z=a} f(z)$, tal que

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_a f.$$

Isto significa que, no exemplo (2.21) de há pouco,

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{|z-b|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,(\operatorname{Res}_a f + \operatorname{Res}_b f).$$

(Havendo mais singularidades dentro do caminho, teremos de incluir os seus resíduos nesta soma.) Encontrámos o *teorema dos resíduos*.

Resta saber: como calculá-los?

(2.22) Dada uma série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^n,$$

podemos subdividi-la em três parcelas:

$$\underbrace{\cdots + \frac{u_{-6}}{z^6} + \frac{u_{-5}}{z^5} + \frac{u_{-4}}{z^4} + \frac{u_{-3}}{z^3} + \frac{u_{-2}}{z^2}}_{\substack{\text{subsérie com expoentes menores ou iguais a } -2;\\ \text{é primitivável no interior da região de convergência.}}} + \frac{u_{-1}}{z} + \underbrace{u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4 + \cdots}_{\substack{\text{subsérie com expoentes maiores ou iguais a } 0;\\ \text{é primitivável no interior da região de convergência.}}}.$$

Dos vários termos da série, só o de expoente -1 não é primitivável. Por isso, todos os outros têm integral 0 ao longo de $|z| = R$ (quando esse caminho está contido na região de convergência da série). E vimos acima que

$$\int_{|z|=R} u_{-1} z^{-1}\,\mathrm{d}z = u_{-1} \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i u_{-1}.$$

Assim,

$$\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i u_{-1}.$$

E se tivermos potências de $z-a$? Nesse caso, fazemos a mudança de variável para $w = z - a$, e tudo o que dissemos até aqui é adaptado da forma correspondente: a única diferença é que as regiões de convergência passam a ser centradas em $w = 0$, ou seja, $z = a$.

(2.23) A FÓRMULA DE CAUCHY para séries de Taylor segue diretamente do que vimos até aqui. Se tivermos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

então

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k-1}.$$

Se ε for suficientemente pequeno, o caminho $|z-a| = \varepsilon$ contorna apenas a singularidade em a. Como o expoente na série de g é -1 quando $n = k$, vemos que o integral é

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} g(z) = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

De facto, não precisamos de restringir-nos a esse tipo de caminho; se γ for um caminho fechado simples (isto é, sem autointerseções) contornando a no sentido positivo, e f for holomorfa ao longo e dentro de γ (porquê todas estas restrições?), então

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

(Veem porquê?) Obtemos assim a *fórmula de Cauchy* (no caso $k = 0$) e a *fórmula de Cauchy generalizada* (quando $k > 0$). Esta fórmula é no mínimo surpreendente: para calcular um integral, basta avaliar uma função (ou a sua derivada) num ponto!

(2.24) Vejamos um exemplo. Vamos avaliar

$$\int_{\gamma} \frac{iz}{z^2-3}\,\mathrm{d}z$$

ao longo de um caminho γ que contorna $-\sqrt{3}$ (no sentido positivo) mas não contorna $\sqrt{3}$. (Desenhem um tal caminho.) Ao fatorizar o denominador, obtemos $z^2-3 = (z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})$ e vemos que $\pm\sqrt{3}$ são as únicas singularidades. Por isso, o integral é

$$\int_{|z+\sqrt{3}|=\varepsilon} \frac{iz}{(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})}\,\mathrm{d}z = \int_{|z+\sqrt{3}|=\varepsilon} \frac{\frac{iz}{z-\sqrt{3}}}{z+\sqrt{3}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \underbrace{(i/2)}_{\frac{iz}{z-\sqrt{3}} \text{ em } z=-\sqrt{3}} = -\pi.$$

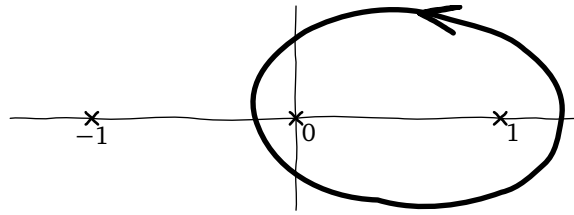
(2.25) Vejamos mais um exemplo. Vamos avaliar

$$\int_{\gamma} \frac{z+3}{z^3-z}\,\mathrm{d}z,$$

onde γ é o caminho indicado na figura. O denominador pode ser fatorizado,

$$z^3 - z = z(z^2-1) = z(z-1)(z+1),$$

mostrando que as singularidades dentro de γ são 0 e 1. Assim, o integral é

$$\int_{|z-0|=\varepsilon} \frac{z+3}{z(z-1)(z+1)}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{z+3}{z(z-1)(z+1)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Agora, aplicamos a fórmula de Cauchy a cada um deste integrais. Ficamos com

$$\int_{|z-0|=\varepsilon} \frac{z+3}{z\,(z-1)\,(z+1)}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-0|=\varepsilon} \frac{\frac{z+3}{(z-1)(z+1)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \underbrace{(-3)}_{\frac{z+3}{(z-1)(z+1)} \text{ em } z=0}$$

$$\int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{z+3}{z\,(z-1)\,(z+1)}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{\frac{z+3}{z\,(z+1)}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \underbrace{2}_{\frac{z+3}{z\,(z+1)} \text{ em } z=1},$$

o que nos permite concluir que o integral original é $-2\pi i$.

(2.26) *Exercício.* Mantemos o caminho γ do exemplo anterior. Calculem os integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2}{z} - \frac{3}{z-1} + \frac{4}{z+1}\,\mathrm{d}z$; (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+1}{(z+1)^2\,(z^2-z)}\,\mathrm{d}z$; (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$.

(Para o último, $z \mapsto e^z$ é holomorfa. Como só vão precisar dos valores em pontos de $\mathbb{R}$...)

(2.27) *Exercício.* Quais os valores possíveis de

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$$

ao longo de caminhos fechados simples? (Precisamos de impor restrições adicionais aos caminhos? Quais?) Comecem por identificar as singularidades.

(2.28) *Exercício.* Quais os valores possíveis de

$$\int_\gamma \frac{1+z+z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$$

ao longo de caminhos fechados simples? Façam o mesmo que no exercício anterior, mas preparem-se para algumas contas...

(2.29) Voltemos à função do exemplo (1.20):

$$h : z \mapsto \frac{-4z+5}{z^2\,(z+5)}.$$

A fórmula de Cauchy generalizada permite-nos calcular diretamente o integral de h ao longo de $|z| = 3$. Como só há uma singularidade dentro desse caminho, temos

$$\int_{|z|=3} \frac{-4z+5}{z^2(z+5)} \, dz = \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\overbrace{\frac{-4z+5}{z+5}}^{g(z)}}{\underbrace{z^2}_{a=0;\, n+1=2}} = 2\pi i \underbrace{\left(\frac{-4(z+5)-(-4z+5)}{(z+5)^2}\right)_{z=0}}_{g'(0)} = -2\pi i.$$

Mas, na verdade, no exemplo (1.20) chegámos a fazer a decomposição de $h(z)$ em frações parciais. Tínhamos

$$h(z) = \frac{1}{z+5} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Por isso,

$$\int_{|z|=3} h(z) \, dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z+5} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \, dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z+5} \, dz - \int_{|z|=3} \frac{1}{z} \, dz + \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2} \, dz\,.$$

O primeiro integral é 0 (pois a singularidade fica fora do caminho). No segundo integral podemos usar a fórmula de Cauchy habitual (com $a = 0$ e $n + 1 = 1$) e obter -1. No terceiro integral podemos usar a fórmula generalizada (com $a = 0$ e $n + 1 = 2$) e obter 0. Alternativamente, podíamos observar que nos dois últimos integrais estamos a considerar potências de z e que só a potência de expoente -1 sobrevive.

(2.30) *Exercício.* Reconsiderem a função do exemplo (1.22), dada por

$$\frac{3z^3 - z - 1}{z^2(z+1)^2} = \frac{2}{z+1} - \frac{3}{(z+1)^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

Quais os seus integrais ao longo de cada um destes caminhos?

(a) $|z| = 2$; (b) $|z-i-1| = 2$; (c) $|z+1| = \frac{1}{2}$; (d) $|z+i| = 3$.

(2.31) Respostas de exercícios.

(2.2) 2; $2i-4$; $2i$; $-\frac{1}{9}$; 1; $-\frac{3}{25}+\frac{4i}{25}$.

(2.4) (a) $u(x,y)=x$, $v(x,y)=0$. (b) sim. (c) $g(z)=-f(iz)$. (d) $\overline{z}=z-2\operatorname{Im}z=z+2f(iz)$. (e) $|z|^2=z\overline{z}$.

(2.5) (a) $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$; $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$; $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. (b) a função é z^2-2iz. (c) usando apenas z e $\overline{z}$, as funções são: z^2+3z; z; $z-\overline{z}$; $\dfrac{1}{1+z^2}$; $\dfrac{z^2+\overline{z}^2}{2}$; z^2; $\dfrac{1}{z}$; $\dfrac{1}{\overline{z}}$; $i\overline{z}$; $iz-z$; $\dfrac{1}{1+\frac{(z+\overline{z})^2}{4}}$; $\dfrac{1}{1+z\overline{z}}$.

(2.6) $g'(f(a))\,f'(a)$.

(2.8) não; sim; sim; não; não.

(2.10) $\pm i$. $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}i$, $-i$.

(2.12) (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; $\displaystyle e^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi)^n}{n!}$.
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n z^n}{e\,n!}$; $\displaystyle e^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-\pi)^n}{e\,n!}$.
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n z^{n+2}}{e\,n!}$; $\displaystyle e^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-\pi)^{n+2}}{e\,n!}+2\pi e^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-\pi)^{n+1}}{e\,n!}+\pi^2e^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-\pi)^n}{e\,n!}$.
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

(2.13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$; $\{z : |z|<1\}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$.

(2.15) (a) $\frac{2i-2}{3}$. (b) $1+\frac{i}{3}$. (c) $\frac{1}{2}+\frac{2i}{3}$. (d) 0.

(2.18) $2\pi i$.

(2.19) 0; $2\pi i$.

(2.26) (a) $-2\pi i$. (b) $-\pi i$. (c) $2\pi i(e-1)$.

(2.27) 0, $\pm\pi$.

(2.28) 0, $\pm\frac{\pi i}{2}$, $\pm\pi i$, $\pm\frac{3\pi i}{2}$.

(2.30) (a) $6\pi i$. (b) $2\pi i$. (c) $4\pi i$. (d) $6\pi i$.

EPISÓDIO 3

A EXPONENCIAL E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A exponencial e as funções trigonométricas podem ser estendidas a $\mathbb{C}$ e há pelo menos meia--dúzia de formas de o demonstrar. Felizmente para nós, não temos qualquer obrigação de construir a análise complexa de raiz e por isso vamos usar livremente o que já sabemos do cálculo. Neste episódio, discutimos essas funções, bem como as coordenadas polares, as raízes, e o logaritmo.

(3.1) A SÉRIE DE MACLAURIN de uma função f analítica em 0 é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Começamos por construir as séries de MacLaurin para cada uma das funções exp, sin e cos, *assumindo* que são funções analíticas. Encontrarmos a série não prova que a função seja analítica: só se provarmos que a série converge para a função que queremos—em vez de para uma função diferente—é que mostramos que a função é analítica. Por isso, o passo seguinte é provar que as séries têm certas propriedades (na reta real), e depois mostrar que só a função que queremos as tem. Por isso, a série e a função têm de coincidir (na reta real). O passo final é invocar o princípio da identidade (5.15) para argumentar que outras propriedades (na reta real) são automaticamente válidas no plano complexo.

(3.2) *Exercício.* Mostrem que as séries de MacLaurin da exponencial, do seno, e do cosseno são, respetivamente,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{10}}{10!} + \cdots$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} - \frac{z^{15}}{15!} + \frac{z^{17}}{17!} - \frac{z^{19}}{19!} \pm \cdots$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} - \frac{z^{14}}{14!} + \frac{z^{16}}{16!} - \frac{z^{18}}{18!} \pm \cdots$$

Usando a conclusão do exercício (5.14), mostrem que o raio de convergência destas séries é ∞.

(3.3) *Exercício. Usando apenas as séries*, mostrem

$$E'(z) = E(z), \quad E(0) = 1, \quad S'(z) = C(z), \quad S(0) = 0, \quad C'(z) = -S(z), \quad C(0) = 1.$$

(3.4) *Exercício.* Vamos mostrar que as funções $x \mapsto e^x$ e $x \mapsto E(x)$ coincidem na reta real. (Isto prova que a série $E(x)$ converge para e^x e que $x \mapsto e^x$ é uma função analítica em $\mathbb{R}$.)

(a) Usando apenas o que sabem sobre as derivadas de E e da exponencial, assim como as regras de derivação (produto, função composta, etc.), mostrem que $E(x)e^{-x}$ é constante.

(b) Determinem a constante substituindo x por um ponto apropriado, e resolvam a equação em ordem a $E(x)$. Qual é a conclusão?

(3.5) *Exercício.* Vamos fazer o mesmo com cos e C e com sin e S.

(a) Usando apenas o que sabem sobre as derivadas de cos, sin, C e S, mostrem que $\cos(x)\,C(x)+\sin(x)\,S(x)$ e $-\sin(x)\,C(x)+\cos(x)\,S(x)$ são constantes.

(b) Mostrem que

$$\begin{cases} \cos(x)\,C(x)+\sin(x)\,S(x)=1, \\ -\sin(x)\,C(x)+\cos(x)\,S(x)=0. \end{cases}$$

e resolvam esse sistema em ordem a $C(x)$ e $S(x)$. (Pode ser mais rápido usar inversão de matrizes.) Qual é a conclusão?

(3.6) Com base nisto, *definimos* a exponencial e as funções trigonométricas em $\mathbb{C}$ como sendo as funções que se obtêm a partir dessas séries, pois na reta real têm os mesmo valores que as funções a que estamos habituados (veem porquê?) e o princípio da identidade mostra que não há outras funções analíticas com esses valores. Isto significa, em particular, que as regras de derivação para exp, sin e cos se mantêm (porquê?), e por isso acabámos de identificar mais umas quantas funções holomorfas.

Mas estas funções têm valores algo inesperados no plano complexo. Por exemplo:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1+(iz)+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\frac{(iz)^6}{6!}+\frac{(iz)^7}{7!}+\frac{(iz)^8}{8!}+\frac{(iz)^9}{9!}+\frac{(iz)^{10}}{10!}+\cdots \\ &= 1+iz-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}-i\frac{z^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+i\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{10}}{10!}\cdots \\ &= \big(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\frac{z^{10}}{10!}\pm\cdots\big)+i\,\big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}\pm\cdots\big) \\ &= \cos z+i\sin z. \end{aligned}$$

(3.7) *Exercício.* Verifiquem, diretamente a partir das séries, que $\cos(-z)=\cos z$ e que $\sin(-z)=-\sin z$. A partir daí, obtenham o sistema

$$\begin{cases} \cos z+i\sin z=e^{iz}, \\ \cos z-i\sin z=e^{-iz}, \end{cases}$$

e mostrem que a solução em ordem a $\cos z$ e $\sin z$ é $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

(3.8) *Exercício.* Escrevam séries de potências (centradas em $z=0$) para $f(z)=e^{az}$ e $g(z)=e^{bz}$ e usem o produto de séries discutido em (1.31) para obter a série para $f(z)\,g(z)$. Simplifiquem-na e concluam que $e^{az}\,e^{bz}=e^{(a+b)z}$. Usem o binómio de Newton

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j\,b^{n-j}=(a+b)^n.$$

(3.9) Mais à frente, havemos de mostrar que qualquer função holomorfa é analítica (e para mostrar isso não vamos usar informação específica sobre exp, sin ou cos no plano complexo, por isso não corremos o risco de fazer raciocínios circulares). Mostraremos também o princípio da identidade, do qual usamos um caso especial: se duas funções analíticas em $\mathbb{C}$ têm os mesmos valores ao longo de uma curva, então são iguais.

Por exemplo, se mantivermos $w \in \mathbb{R}$ constante, as funções $z \mapsto e^{z+w}$ e $z \mapsto e^z\, e^w$ são holomorfas e o seu domínio é $\mathbb{C}$. Como essas funções são iguais (isto é, $e^{z+w} = e^z\, e^w$) em pontos $z \in \mathbb{R}$, então o princípio da identidade garante que também são iguais em pontos $z \in \mathbb{C}$! Mas isso prova que, se agora fixarmos $z \in \mathbb{C}$, as funções $w \mapsto e^{z+w}$ e $w \mapsto e^z\, e^w$ são iguais em pontos $w \in \mathbb{R}$. Logo, outra vez pelo princípio da identidade, também são iguais em pontos $w \in \mathbb{C}$! (Desorientados? Voltem ao princípio do parágrafo, e leiam outra vez, com calma...) Ou seja, com o que parece ser só um jogo de palavras, provámos que a identidade $e^{z+w} = e^z\, e^w$, válida se $z, w \in \mathbb{R}$, é automaticamente válida se $z, w \in \mathbb{C}$. De forma semelhante, qualquer identidade *envolvendo funções holomorfas* (isto é, que não envolva módulos, partes reais, partes imaginárias, ou conjugados) pode ser "transplantada" de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$.

Mais um exemplo. Em $\mathbb{R}$, é verdade que $e^z\, e^{-z} = 1$. Logo, o mesmo se passa em $\mathbb{C}$, o que assegura, imediatamente, que $e^z \neq 0$ e que $e^{-z} = 1/e^z$ para $z \in \mathbb{C}$.

(3.10) *Exercício.* Fixem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vimos há pouco que

$$\begin{aligned} e^{\alpha i} &= \cos\alpha + i \sin\alpha, \\ e^{\beta i} &= \cos\beta + i \sin\beta. \end{aligned}$$

(a) Usem essas identidades para simplificar ambos os membros da igualdade

$$e^{(\alpha+\beta)i} = e^{\alpha i}\, e^{\beta i}.$$

(b) Separem as partes real e imaginária (de cada membro dessa igualdade, depois de simplificado). Que identidades obtêm?

(c) Usem o princípio da identidade para justificar que essas identidades também são válidas se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(3.11) *Exercício.* Usem $e^{x+iy} = e^x\, e^{iy}$ e as identidades que temos explorado, para escrever $z \mapsto e^z$ na forma cartesiana, como fizemos no exemplo (1.3) e no exercício (1.4).

(3.12) *Exercício.* Escrevam as seguintes funções na forma cartesiana:

(a) $z \mapsto e^{iz}$; (b) $z \mapsto e^{2\bar{z}+iz}$; (c) $z \mapsto \cos z$; (d) $z \mapsto \sin z$;

(e) $z \mapsto \dfrac{1}{1+e^z}$; (f) $z \mapsto \dfrac{e^{2z}}{\bar{z}}$; (g) $z \mapsto e^{e^z}$; (h) $z \mapsto \cos(\sin z)$.

(3.13) *Exercício.* Calculem os integrais

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z^2}\, dz$; (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{2z+\pi}\, dz$; (c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z\,(2z+\pi)}\, dz$;

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos(2z)}{z^3}\, dz$; (e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(2z+\pi)^2}\, dz$; (f) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-i}\, dz$.

(3.14) Coordenadas polares. Usando a exponencial complexa, podemos escrever um número complexo em coordenadas polares. Com efeito, qualquer ponto (x, y) pode ser escrito na forma $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, onde $r \geq 0$ é o raio e θ é o ângulo. Ficamos com

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{\theta i} = |z|\, e^{\theta i}.$$

É habitual chamar *argumento* de z a qualquer dos ângulos θ possíveis. Somando múltiplos inteiros de 2π a um argumento, podemos obter todos os outros. É comum escrever $\arg z$ para indicar um argumento.

Posto de outra forma, se z e w forem números complexos quaisquer, então $e^z = e^w$ obriga a $z = w + k2\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. (Vale a pena fazerem uma pausa para verificarem que isso funciona mesmo que z e w não sejam imaginários puros.)

É fácil obter a *forma polar* de um número complexo. Por exemplo, se $a = 1 + i$, fazemos:

$$a = |a|\,\frac{a}{|a|} = \sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^{\pi i/4}.$$

Podemos usar a notação mesmo quando o ângulo não seja um dos mais populares. Por exemplo:

$$4 - 3i = |4 - 3i|\,\frac{4-3i}{|4-3i|} = 5\,\frac{4-3i}{5} = 5\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) = 5(\cos\theta + i\sin\theta).$$

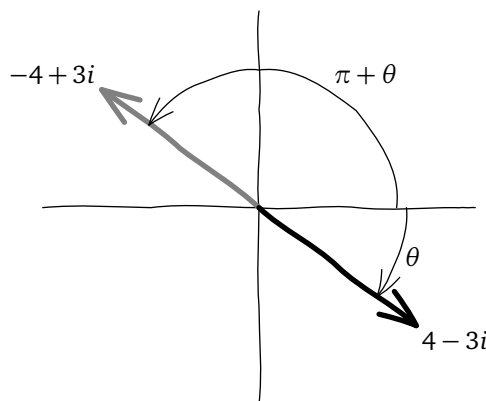
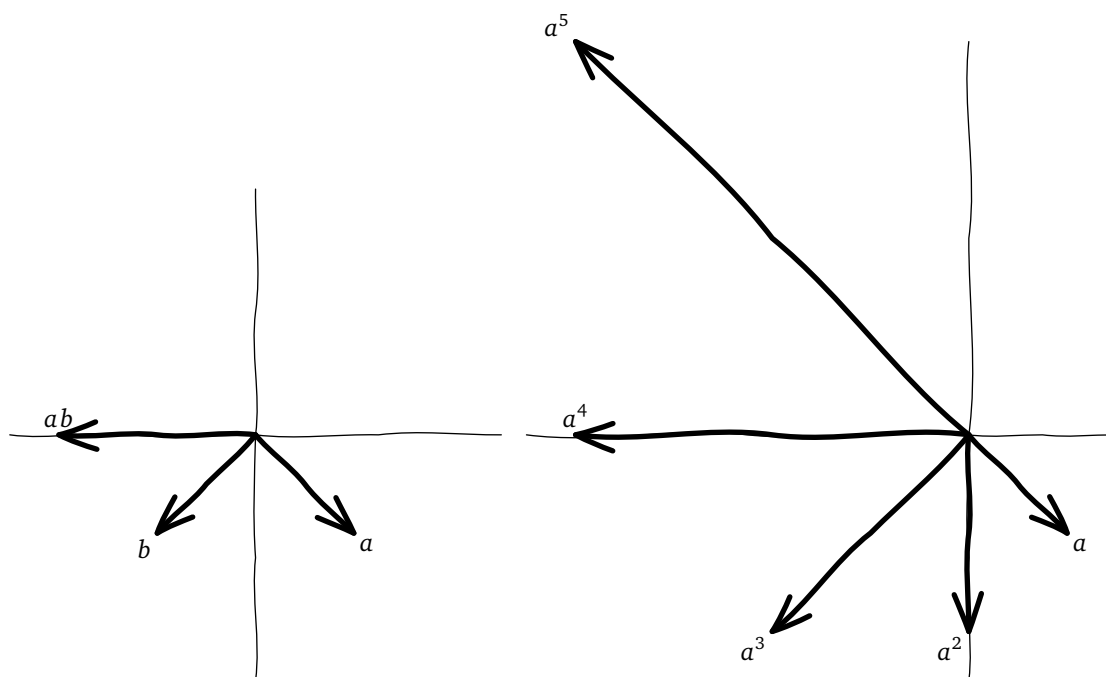
E o que fazemos agora? Observamos que se $4 = 5\cos\theta$ e $-3 = 5\sin\theta$, então necessariamente

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5\sin\theta}{5\cos\theta} = \frac{-3}{4}.$$

Logo, $\theta = \arctan -\frac{3}{4} = -\arctan\frac{3}{4}$ e

$$4 - 3i = 5e^{-\arctan(3/4)\,i}.$$

Mas é preciso algum cuidado, porque arctan só devolve ângulos no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (ou seja, só ajuda para pontos no primeiro e quarto quadrantes). É fácil lidar com os casos $z = iy$ com $y \in \mathbb{R}$, pois podemos escolher logo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (se $y > 0$) ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (se $y < 0$). Para pontos no segundo ou no terceiro quadrantes, podemos considerar o simétrico (que estará necessariamente no quarto ou no primeiro quadrantes). Por exemplo:

$$-4 + 3i = -(4 - 3i) = -5\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) = -5e^{\arctan(-3/4)i} = 5e^{\arctan(-3/4)\,i + \pi i}.$$

A forma polar também nos permite simplificar alguns produtos e quocientes. Por exemplo, se $a = 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}$ e $b = -1 - i = \sqrt{2}\,e^{-3\pi i/4}$, então

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{2}\,e^{-\pi i/4} \cdot \sqrt{2}\,e^{-3\pi i/4} = 2e^{(-\pi i/4)+(-3\pi i/4)} = 2e^{-\pi i} = -2, \\ \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2}\,e^{-3\pi i/4}} = e^{(-\pi i/4)-(-3\pi i/4)} = e^{\pi i/2} = i, \\ a^5 &= \left(\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}\right)^5 = \sqrt{2}^5\, e^{-5\pi i/4} = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 + 4i. \end{aligned}$$

(3.15) *Exercício.* Escrevam estes complexos na forma polar e na forma cartesiana:

(a) $-1 + i$;

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$;

(c) $-5 - 7i$;

(d) $\dfrac{\sqrt{6}}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}i$;

(e) $(1+i)e^{\pi i/3}$;

(f) $(\sqrt{15} - i\sqrt{5})\,e^{2\pi i/3}$;

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{15} - i\sqrt{5}}$;

(h) $\exp(e^{\pi i/2})$.

(i) $(-1+i)^{-10}$;

(j) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^5$;

(k) $\dfrac{(-1+i)^{-10}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^5}$;

(l) $(-1+i)^{10}\,(\sqrt{15} - i\sqrt{5})^2$.

(3.16) *Exercício.* Vamos reconsiderar o exercício (2.18) à luz do que acabámos de discutir. Notem que o caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto \cos t + i \sin t$ desse exercício também pode ser escrito na forma $\gamma : t \mapsto e^{it}$. Usem essa forma para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,.$$

(3.17) Raízes complexas e equações polinomiais. As mesmas ideias permitem-nos calcular raízes de números complexos. Por exemplo, imaginem que queremos calcular as raízes cúbicas de $(1+i)$, ou seja, queremos encontrar todas as soluções de $z^3 = 1+i$. Se escrevermos $z = re^{\theta i}$ para a forma polar de z e a substituirmos na equação, obtemos

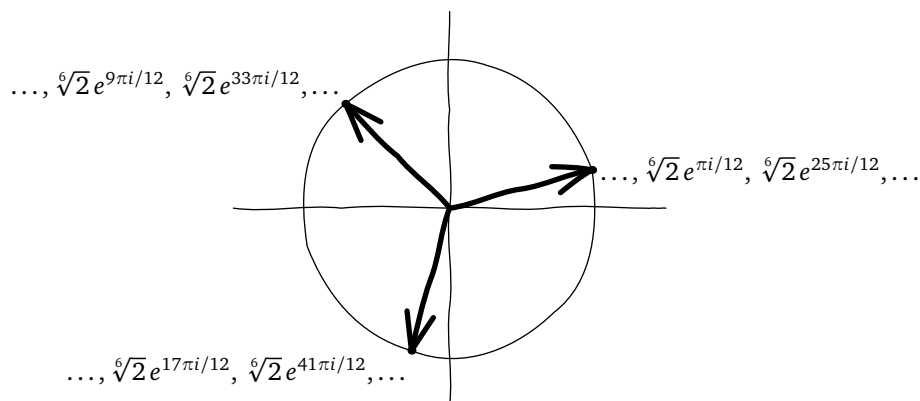
$$(re^{\theta i})^3 = \sqrt{2}\,e^{\pi i/4} \qquad \Leftrightarrow \qquad r^3 e^{3\theta i} = \sqrt{2}\,e^{\pi i/4}.$$

Aplicando o módulo a ambos os membros da igualdade, obtemos $r^3 = \sqrt{2}$ (pois se $t \in \mathbb{R}$, então e^{it} está no círculo unitário, e portanto $|e^{it}| = 1$). Logo, $r = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$. Até aqui, nada de mais: como o raio é sempre um real não-negativo, há apenas um valor possível para ele.

Mas quanto aos argumentos? Temos necessariamente $e^{3\theta i} = e^{\pi i/4}$, mas isto *não* significa que $3\theta i = \pi i/4$. O máximo que podemos concluir é que os dois ângulos têm de corresponder à mesma posição no círculo trigonométrico; ou seja, que a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π. Assim, somos levados a

$$3\theta = \frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Quer isto dizer que há uma infinidade de raízes cúbicas? Também não. Cada uma é da forma $\sqrt[6]{2}e^{\theta i}$; se dois valores diferentes de θ corresponderem ao mesmo ponto no círculo trigonométrico, darão origem à mesma raíz cúbica. Como a fórmula nos dá ângulos θ separados por terços de circunferência, de três em três saltos obtemos os mesmos pontos. Por isso, basta considerar três valores consecutivos de k. Por exemplo:

$$k = 0 \text{ dá-nos } \sqrt[6]{2}\,e^{\pi i/12}, \qquad k = 1 \text{ dá-nos } \sqrt[6]{2}\,e^{9\pi i/12}, \qquad k = 2 \text{ dá-nos } \sqrt[6]{2}\,e^{17\pi i/12}.$$

Em geral, as raízes n de $re^{\theta i}$ são $\sqrt[n]{r}\exp\bigl(\frac{\theta+k2\pi}{n}i\bigr)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ toma n valores consecutivos (por exemplo, $k = 0, 1, \ldots, n-1$).

(3.18) *Exercício.* Determinem todas as soluções destas equações:

(a) $z^2 + 27 + 2i\sqrt{3} = 10z$;

(b) $2iz^2 + (8i+6)z + \frac{7}{2}i + 11 = 0$;

(c) $(z - 7 + i)^4 + \sqrt{7} = i\sqrt{21}$;

(d) $z^4 - 2\sqrt{3}\,iz^2 = 4 + 4\sqrt{3}\,i$;

(e) $(z^2 - 1)^3 = 8$;

(f) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-1)^n} = -\frac{1}{z}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{8^n} = \frac{z}{3}$.

Numa destas alíneas, pode ser útil saber que $(2+\sqrt{3}\,i)^2 = 1+4\sqrt{3}\,i$.

(3.19) EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. Também podemos resolver equações trigonométricas no plano complexo. Por exemplo, será que no plano complexo há mais zeros do seno do que na reta real? Temos

$$\sin z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0.$$

Se pusermos $w = e^{iz}$ (já sabemos que a exponencial não tem zeros, por isso podemos contar com $w \neq 0$), a última equação transforma-se em

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^2 - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (e^{iz})^2 = 1.$$

Mas esta equação pode ser reescrita como $e^{2iz} = e^0$, cuja solução é $2iz = 0 + k2\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$. Simplificando: $z = k\pi$.

Mas então é tudo como na reta real? Não. Vejamos quais são as soluções de $\cos z = 2$. Voltando a usar $w = e^{iz}$, temos:

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w + \frac{1}{w} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^2 - 4w + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Logo, as soluções são da forma

$$w = e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} = e^{\log(2\pm\sqrt{3})} \qquad \Longleftrightarrow \qquad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + k2\pi i, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

(Notem que usamos log em vez de ln, pois nenhum outro logaritmo é relevante.) Simplificando, obtemos $z = -i\log(2 \pm \sqrt{3}) + k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

(3.20) *Exercício.* Resolvam estas equações:

(a) $\sin z = \frac{1}{2}$; (b) $\cos z = \frac{e + e^{-1}}{2}$; (c) $\tan z = i$; (d) $\tan z = \frac{2}{\sqrt{3}} - i$.

(3.21) *Exercício.* Mostrem que $\cos z = \alpha$ tem apenas as soluções habituais quando $\alpha \in [-1, 1]$. Mostrem também que $z \notin \mathbb{R}$ se α tiver qualquer outro valor complexo. Façam o mesmo para $\sin z = \alpha$.

(3.22) *Exercício.* Mostrem que $\tan z = \alpha$ tem apenas as soluções habituais quando $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostrem também que se α não for real, então z também não o é.

(3.23) *Exercício.* Vamos calcular $\cos \frac{2\pi}{5}$. Para tal, definimos $\omega = e^{2\pi i/5}$.

(a) Mostrem que ω é um zero do polinómio $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Para tal, multipliquem o polinómio por $(z - 1)$ e simplifiquem. O que podem concluir?

(b) Mostrem que a parte real de $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$ é $2\cos\frac{4\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 1$.

(c) Usem a fórmula para $\cos(2\theta)$ (se não se recordam dela, podem usar o exercício (3.10)) para escrever $\cos\frac{4\pi}{5}$ em termos de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

(d) Combinando a informação das alíneas anteriores e escrevendo $x = \cos\frac{2\pi}{5}$, obtenham uma equação de segundo grau para x e resolvam-na.

(3.24) O logaritmo Aproveitamos para apresentar o logaritmo complexo. Já vimos que as soluções de $e^z = e^a$ são $z = a + k2\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$. Isto significa que a exponencial é uma função com período $2\pi i$, ou seja, os seus valores repetem-se de $2\pi i$ em $2\pi i$. Assim, há vários valores possíveis para o logaritmo. Por exemplo,

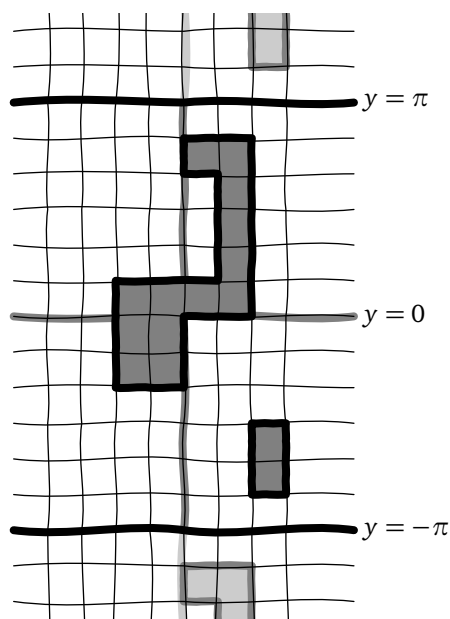
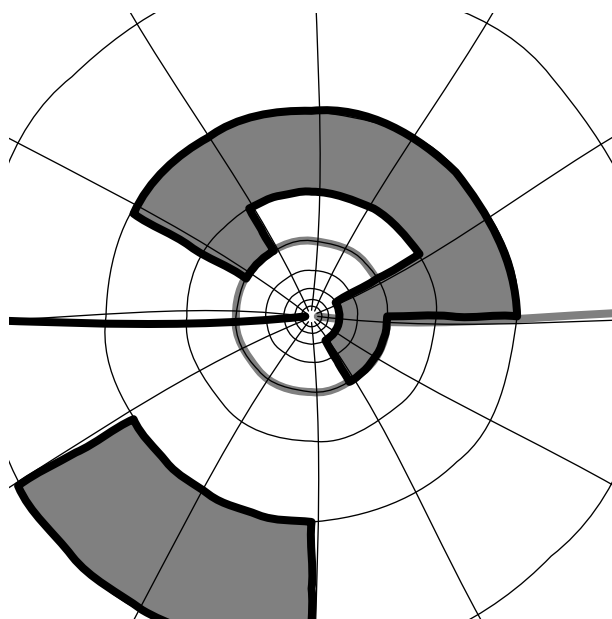
$$z = \log 2 + \tfrac{\pi}{3} i + k2\pi i, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^z = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i,$$

logo todos os valores $\log 2 + \frac{\pi}{3} i + k2\pi i$ são logaritmos de $(1 + \sqrt{3}i)$.

Ora, se quiseremos que o logaritmo seja uma função, temos de indicar quais os valores que aceitamos (é comum dizer que escolhemos um *ramo* da função). Por exemplo, podemos exigir que a parte imaginária (a que está associada ao ângulo) tome valores num certo intervalo, como no chamado *ramo principal* do logaritmo:

$$\log(e^{x+iy}) = x + iy, \quad \text{se } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \,]-\pi, \pi[.$$

Isto define uma função em todo o plano (compatível com a função logaritmo em $\mathbb{R}^+$), exceto em 0 e nos pontos correspondentes ao ângulo π. (Autores diferentes usam intervalos fechados de um dos lados, mas é preferível se o domínio for um aberto.) Outros ramos correspondem a outras escolhas de intervalo. Notem que não há nenhuma convenção fixa sobre como distinguir ramos do logaritmo, por isso é sempre mais seguro dizer explicitamente qual se está a usar.

Para já, vamos assumir que qualquer ramo log do logaritmo é uma função holomorfa. Nesse caso, como $\exp(\log z) = z$, a regra da função composta diz-nos que $\exp(\log z) \cdot (\log z)' = 1$, ou seja (porquê?), que $(\log z)' = 1/z$.

(3.25) *Exercício.* Escolham um ramo do logaritmo, e considerem

$$f : z \mapsto \log(1-z).$$

Qual o domínio de f? Qual a sua derivada? Qual a série de MacLaurin de f'? E a de f?

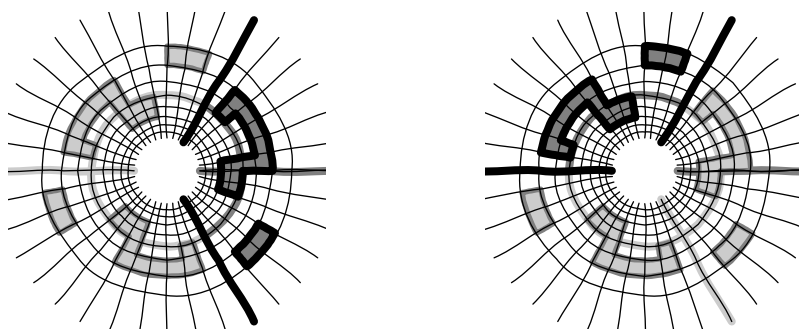
(3.26) POTÊNCIAS. Dado um ramo do logaritmo, podemos definir a potência de expoente $\alpha \in \mathbb{C}$ por

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z);$$

isto é compatível com a identidade (que gostaríamos de manter) $\log(z^\alpha) = \alpha \log z$, *desde que* $\alpha \log z$ fique no contradomínio do ramo que escolhemos para o logaritmo.

Vejamos um exemplo concreto. Imaginem que queremos definir um ramo da raiz cúbica. Para tal, precisamos de escolher um ramo do logaritmo, ou seja, escolher o intervalo que aceitamos para os ângulos. Se escolhermos ângulos $\theta \in]-\pi, \pi[$, ficamos com

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{re^{\theta i}} = \exp\Big(\frac{\log(re^{\theta i})}{3}\Big) = \exp\Big(\frac{\log r + \theta i}{3}\Big) = e^{(\log r)/3} \cdot e^{\theta i/3} = \sqrt[3]{r} e^{\theta i/3}.$$

Como $-\pi < \theta < \pi$, temos $-\frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3}$. Por isso, este ramo da raiz cúbica devolve pontos com ângulos em $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$ (ou seja, o contradomínio ocupa um setor correspondente a um terço da volta completa). Da mesma forma, se escolhêssemos um ramo do logaritmo devolvendo ângulos em $]\pi, 3\pi[$, o ramo correspondente da raiz cúbica devolveria ângulos em $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ (veem como?).

(3.27) *Exercício.* Usem $z = e^{\alpha i}$ e $w = e^{\beta i}$ para mostrar que as seguintes propriedades falham para alguns z e w. (Parte do exercício é perceber qual o tipo de falha.)

(a) $\sqrt[3]{zw} = \sqrt[3]{z}\,\sqrt[3]{w}$; (b) $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt{z}$; (c) $\log(zw) = \log z + \log w$.

(3.28) *Exercício.* Fixem $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Mostrem que a identidade $\log(z^\alpha) = \alpha \log z$ falha no plano complexo. (Isto inclui perceber *o que* falha.)

(3.29) *Exercício.* Escolham um ramo do logaritmo e assumam que define uma função holomorfa. Qual a derivada de $f : z \mapsto z^\alpha$?

(3.30) Respostas de exercícios.

(3.11) $e^x \cos y + ie^x \sin y$.

(3.12) (a) $e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$.
(b) $e^{2x-y} \cos(x-2y) + ie^{2x-y} \sin(x-2y)$.
(c) $\frac{e^y+e^{-y}}{2} \cos x - i\frac{e^y-e^{-y}}{2} \sin x$.
(d) $\frac{e^y+e^{-y}}{2} \sin x + i\frac{e^y-e^{-y}}{2} \cos x$.
(e) $\frac{1+e^x \cos y}{(1+e^x \cos y)^2+(e^x \sin y)^2} - i\frac{e^x \sin y}{(1+e^x \cos y)^2+(e^x \sin y)^2}$.
(f) $\frac{xe^{2x}\cos(2y)-ye^{2x}\sin(2y)}{x^2+y^2} + i\frac{xe^{2x}\sin(2y)+ye^{2x}\cos(2y)}{x^2+y^2}$.
(g) $e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y) + ie^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y)$.
(h) $\cos(\sin x \cosh y)\cosh(\cos x \sinh y) -$
$i \sin(\sin x \cosh y) \sinh(\cos x \sinh y)$.

(3.13) (a) $4\pi i$. (b) $e^{-\pi/2}\pi i$. (c) $2i - 2ie^{-\pi/2}$.
(d) $-4\pi i$. (e) 0. (f) $-\pi e + \frac{\pi}{e}$.

(3.15) (a) $\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$; $-1+i$.
(b) $\sqrt{2/3}e^{-\pi i/4}$; $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
(c) $\sqrt{74}\exp\big((\pi + \arctan\frac{7}{5})i\big)$; $-5-7i$.
(d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{\pi i/6}$; $\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$.
(e) $\sqrt{2}e^{7\pi i/12}$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$.
(f) $2\sqrt{5}e^{\pi i/2}$; $2\sqrt{5}i$. (g) $\frac{1}{2\sqrt{5}}e^{\pi i/6}$; $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} + \frac{i}{4\sqrt{5}}$.
(h) e^i; $\cos 1 + i \sin 1$. (i) $\frac{1}{2^5}e^{\pi i/2}$; $\frac{i}{2^5}$.
(j) $(\frac{2}{3})^{5/2}e^{3\pi i/4}$; $-\frac{4}{3^{5/2}} + \frac{4i}{3^{5/2}}$.
(k) $(\frac{3}{8})^{5/2}e^{-\pi i/4}$; $(\frac{3}{8})^{5/2}\frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{3}{8})^{5/2}\frac{i}{\sqrt{2}}$.
(l) $2^7 \cdot 5\, e^{-5\pi i/6}$; $-2^6 \cdot 5\sqrt{3} - 2^6 \cdot 5i$.

(3.18) (a) $6-\sqrt{3}i$; $4+\sqrt{3}i$.
(b) $-\frac{3}{2}+i$; $-\frac{5}{2}+2i$.
(c) $7-i+(2\sqrt{7})^{1/4}e^{\pi i/6}$; $7-i+(2\sqrt{7})^{1/4}e^{4\pi i/6}$;
$7-i+(2\sqrt{7})^{1/4}e^{7\pi i/6}$; $7-i+(2\sqrt{7})^{1/4}e^{10\pi i/6}$.
(d) $\pm\sqrt{2}i$; $\pm 2e^{\pi i/6}$. (e) $\pm\sqrt{3}$; $\pm 3^{1/4}e^{\pm\pi i/4}$.
(f) $e^{\pm 2\pi i/5}$; $e^{\pm 4\pi i/5}$. (g) $-2^{1/4}e^{\pi i/8}$.
(h) $4 \pm 2\sqrt{2}i$.

(3.20) (a) $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ e $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$ (com $k \in \mathbb{Z}$).
(b) $\pm i + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
(c) não tem soluções.
(d) $\frac{\pi}{3} + k\pi - \frac{i}{2}\log 2$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(3.23) (c) $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\big(\cos\frac{2\pi}{5}\big)^2 - 1$. (d)
$4x^2+2x-1=0$; $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(3.25) (No ramo com $\operatorname{Im}\log z \in \,]\alpha, \alpha+2\pi[$.)
$\{z : 1-z = re^{\theta i}$, com $r>0$ e $\alpha < \theta < \alpha+2\pi\}$;
$-\dfrac{1}{1-z}$; $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; $2\pi ki - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ (com $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2\pi k \in \,]\alpha, \alpha+2\pi[$; notem que isto exige que α não seja um múltiplo de 2π).

(3.29) $\alpha z^\alpha / z$.

EPISÓDIO 4

FUNÇÕES HOLOMORFAS

Recapitulemos algo do que vimos até aqui, bem como o que deixámos por fazer.

Bem no princípio, no (1.3), começámos por falar de funções $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e por escrevê-las na forma cartesiana. Em seguida, no (2.1), definimos: uma função é *holomorfa num ponto* se for diferenciável numa vizinhança desse ponto, e é *holomorfa num conjunto* Ω se for diferenciável numa vizinhança desse conjunto. (Implicitamente, isto obriga a que essas vizinhanças estejam contidas no domínio da função.) Nessa altura, apontámos um facto importante: para todos os efeitos práticos, as funções holomorfas são as que podem ser expressas só em termos de z, sem envolver x, nem y, nem $|z|$, nem $\overline{z}$. Vamos finalmente esclarecer estes aspetos.

De (2.14) em diante, definimos os integrais de caminho e de comprimento em $\mathbb{C}$ e vimos alguns exemplos. Em (2.20) mencionámos o *teorema de Cauchy*: se uma função f é holomorfa num conjunto Ω e ao longo do seu bordo $\partial\Omega$, e se esse bordo consiste num número finito de caminhos "suficientemente regulares" (e adiámos a definição de "suficientemente regular"), então o integral de f ao longo de $\partial\Omega$ é 0. É tempo de vermos a demonstração deste teorema.

(4.1) O PLANO $\mathbb{C}$ pode ser visto como um espaço vetorial real. De facto, em (1.3) chegámos mesmo a dizer que podíamos olhar para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ como se fosse o vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como cada $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito de forma única como $z = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, 1 e i formam uma base para $\mathbb{C}$ (visto como espaço vetorial real). Em relação a essa base, o complexo $x + iy$ pode ser escrito como vetor coluna $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

Um número complexo *também* pode ser identificado com a transformação linear $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ consistindo na multiplicação pelo dito número. Por exemplo, se $m = 2+3i$, a transformação $M(z) = mz$ é de facto uma transformação linear de $\mathbb{C}$, pois $M(z + w) = M(z) + M(w)$ e $M(cz) = c\,M(z)$ para $c \in \mathbb{R}$ (também é verdade para $c \in \mathbb{C}$, mas não precisamos de usar esse caso). Sendo uma transformação linear, podemos determinar a sua matriz em relação à base formada por 1 e i. A primeira coluna dessa matriz é o vetor coluna correspondente a $M(1)$, enquanto a segunda coluna corresponde a $M(i)$. A matriz que obtemos é

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note-se que o número complexo original pode ser lido na primeira coluna ($\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ corresponde a $2 + 3i$, que é efetivamente o número original m), enquanto que a segunda se obtém da primeira fazendo uma rotação de $\frac{\pi}{2}$.

Da mesma forma, ao número $x + iy$ corresponde a matriz

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

e qualquer matriz com esse padrão pode ser obtida a partir de um número complexo. Mais: toda a aritmética com números complexos pode ser feita com essas matrizes 2×2.

Por exemplo, se $a = 10 - 4i$, $b = 7 + 30i$, $A(z) = az$, e $B(z) = bz$, a transformação $A + B$ correspondente de facto a $a + b$, pois $(A+B)(z) = A(z) + B(z) = az + bz = (a + b)z$. Portanto, necessariamente, a soma de complexos é compatível com a soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -30 \\ 30 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -26 \\ 26 & 17 \end{bmatrix}.$$

Podemos também comparar o produto de complexos com o produto de matrizes. Usando os mesmos a e b, temos

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -30 \\ 30 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 & -272 \\ 272 & 190 \end{bmatrix}.$$

Comparem com o resultado do exemplo (1.1). De novo, podemos ter a certeza que o resultado é a matriz correspondente a ab. A razão é que sabemos (da álgebra linear) que o produto de matrizes corresponde à composição de transformações. Dito de outra forma, a matriz produto corresponde à transformação $A(B(z)) = A(bz) = abz = (ab)z$, que por sua vez corresponde ao produto (de complexos) ab.

Nesta correspondência entre complexos e (algumas) matrizes 2×2, a soma corresponde à soma, o produto ao produto, a inversa à inversa, o conjugado à transposta, o quadrado do módulo ao determinante. Portanto, podemos usar essas matrizes como se fossem os números complexos, e os resultados estarão corretos.

(4.2) As equações de Cauchy–Riemann. A nossa compreensão da derivada tem muito a ganhar com o uso dessa correspondência. É que também vimos, de (1.3) em diante, como interpretar funções $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nesse exemplo, considerámos a função $f : z \mapsto 3i + (2 + i)z$ e escrevemo-la na forma cartesiana:

$$\underbrace{f(x+iy)}_{f(z)} = 3i + (2+i)(x+iy) = 3i + (2x + 2iy + ix + i^2 y) = \underbrace{(2x - y)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(3 + x + 2y)}_{v(x,y)}.$$

Com base nisto, definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) = (2x - y, 3 + x + 2y)$.

Comparemos então a derivada de f com a jacobiana de F. A derivada de f é dada por

$$f'(z) = \big(3i + (2+i)z\big)' = 2 + i.$$

Por outro lado, a jacobiana de F é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

É por coincidência que esta matriz é a que corresponde ao complexo $2+i$?

Não. Pensem na definição de derivada de uma função $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dizer que o complexo m é a derivada de f no ponto a é dizer que

$$\frac{f(a+h)-f(a)-mh}{|h|} \to 0 \quad \text{quando } h \to 0$$

(verifiquem que isto é equivalente à definição habitual), ou seja, é dizer que $f(a)+mh$ é uma boa aproximação para $f(a+h)$ (à escala de $|h|$). Dizer que a matriz M é a derivada de F no ponto $\mathbf{a}$ é dizer que

$$\frac{F(\mathbf{a}+\mathbf{h})-F(\mathbf{a})-M\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \to \mathbf{0} \quad \text{quando } \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

ou seja, é dizer que $F(\mathbf{a})+M\mathbf{h}$ é uma boa aproximação para $F(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ (à escala de $\|\mathbf{h}\|$).

Comparando as duas definições, vemos que são idênticas, *desde que* a matriz M seja uma das matrizes correspondentes a números complexos. Talvez se recordem de um resultado do cálculo com várias variáveis, segundo o qual se uma função F tem derivadas parciais contínuas, então é realmente diferenciável e a derivada é a matriz das derivadas parciais. No caso de uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (com derivadas parciais contínuas) a derivada é a matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Nos pontos em que esta matriz corresponde a um número complexo, ou seja, onde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(as chamadas *equações de Cauchy–Riemann*), a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e a sua derivada é o complexo correspondente à matriz.

(4.3) Voltemos às funções dos exemplos (2.1) e (2.3). A forma cartesiana de $f : z \mapsto z^2$ é

$$(\underbrace{x+iy}_{z})^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\, i$$

e a jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

corresponde a um número complexo (ou seja, as equações de Cauchy–Riemann são satisfeitas), que pode ser lido na primeira coluna $\left[\begin{smallmatrix} 2x \\ 2y \end{smallmatrix}\right]$. Ou seja, trata-se de $2x+2yi = 2z$. Constatamos que a função é diferenciável.

Por outro lado, a forma cartesiana da função $f : z \mapsto \operatorname{Re} z$ é

$$\operatorname{Re}(\underbrace{x+iy}_{z}) = \underbrace{x}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)}\, i,$$

logo a jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não corresponde a um número complexo e a função não é diferenciável.

(4.4) *Exercício.* Escrevam cada uma das seguintes funções na forma cartesiana e usem as equações de Cauchy–Riemann para decidir quais são holomorfas no seu domínio ($x+iy$ é sempre a forma cartesiana de z).

$$\begin{array}{llll}
z\mapsto z^2+3z; & z\mapsto \dfrac{|z^2|}{\overline{z}}; & z\mapsto z-\overline{z}; & z\mapsto \dfrac{1}{1+z^2};\\
z\mapsto x^2-y^2; & z\mapsto x^2-y^2+2ixy; & z\mapsto \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}; & z\mapsto \dfrac{x+iy}{x^2+y^2};\\
z\mapsto ix+y; & z\mapsto -x-y+ix-iy; & z\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}; & z\mapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2};\\
z\mapsto \cos y+i\sin y; & z\mapsto \cos x+i\sin y; & z\mapsto e^{z}; & z\mapsto e^{\overline{z}}.
\end{array}$$

(4.5) Vale a pena notar que, quando a função f é diferenciável, a derivada pode ser lida na primeira coluna da matriz (correspondente a $\frac{\partial f}{\partial x}$). Por outro lado, se a matriz representa um número complexo, a segunda coluna da matriz (correspondente a $\frac{\partial f}{\partial y}$) corresponde ao resultado de multiplicar esse número complexo por i. Por outras palavras, as equações de Cauchy–Riemann (afirmar que a matriz representa um número complexo) são equivalentes a $\frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial x}$. Se forem satisifeitas, a derivada é dada por $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y}$.

Isto permite-nos, finalmente, esclarecer o que se passava no exercício (2.5). Aí, dissemos que uma função era holomorfa se pudesse ser expressa exclusivamente em termos de z, sem envolvimento de $\overline{z}$, e prometemos que mais tarde explicaríamos essa afirmação.

Pensemos então em qual era o processo. Escrevíamos a função f em termos de z e $\overline{z}$, depois de eliminar todas as ocorrências de $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$ e $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$. Ou seja, ficamos com uma expressão

$$f(z,\overline{z})=F\Big(\underbrace{\frac{z+\overline{z}}{2}}_{x},\underbrace{\frac{z-\overline{z}}{2i}}_{y}\Big).$$

Dizer que esta expressão é independente de $\overline{z}$ é dizer que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$. Mas

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial\big(\overbrace{\frac{z+\overline{z}}{2}}^{x}\big)}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial\big(\overbrace{\frac{z-\overline{z}}{2i}}^{y}\big)}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y},=\frac{1}{2i}\Big(i\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\Big),$$

portanto $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ quando $\frac{\partial F}{\partial y}=i\frac{\partial F}{\partial x}$. Isto é, as equações de Cauchy–Riemann são equivalentes a $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$. (Aqui escrevi as equações de Cauchy–Riemann com F em vez de f para evitar confusões entre a função escrita em termos de z e $\overline{z}$ e a função escrita em termos de x e y. Na prática, raramente se faz qualquer distinção, porque não há grande risco de confusão.)

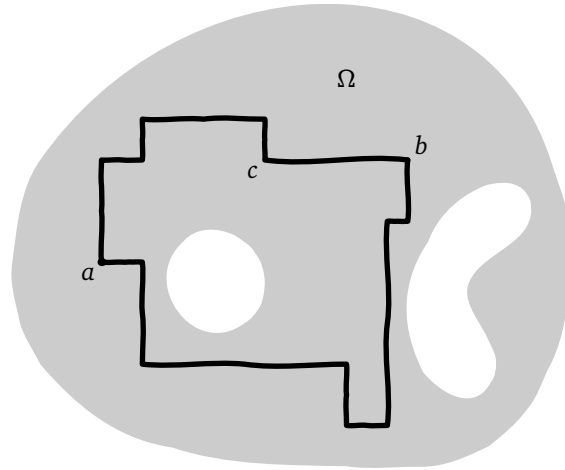
(4.6) *Exercício.* Usem o que já fizeram no exercício (4.4) para determinar as derivadas dessas funções (nos casos em que existem).

(4.7) *Exercício.* Seja f uma função diferenciável definida num aberto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ conexo por arcos, e seja $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ a sua forma cartesiana. Usem as equações de Cauchy–Riemann para mostrar:

(a) Se $f'(z) = 0$ em Ω, então f é constante.

(b) Se u é constante em Ω, então a própria f é constante.

(c) Se v é constante em Ω, então a própria f é constante.

(d) Se $|f|$ é constante em Ω, então a própria f é constante. (Em vez de usar $|f|$, talvez queiram usar $|f|^2 = u^2 + v^2$ e arranjar alguma equação matricial envolvendo a jacobiana.)

(4.8) *Exercício.* Vamos mostrar que se f é uma função contínua no aberto (conexo por arcos) Ω e $\int_\gamma f = 0$ para qualquer caminho fechado γ formado por um número finito de segmentos horizontais e verticais e contido em Ω, então f é primitivável. (De acordo com o exercício (2.17), isto implica que $\int_\gamma f = 0$ para qualquer outro caminho fechado contido em Ω.) Fixem qualquer ponto $a \in \Omega$.

(a) Se $b \in \Omega$, escolham qualquer caminho γ ligando a a b, contido em Ω, e formado apenas por segmentos horizontais e verticais. Definam $g(b) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ e mostrem que este valor não depende do caminho γ escolhido.

(b) Usando um caminho γ que termine num segmento horizontal, calculem $\frac{\partial g}{\partial x}(b)$. Mais especificamente: digamos que o último segmento vai do ponto c ao ponto b. Então γ pode ser dividido num pedaço γ_1 que vai de a a c e num pedaço γ_2 que vai de c a b. Escrevam $b = x + iy$ e $c = x_0 + iy$. Então o segmento γ_2 pode ser parametrizado por $\gamma_2(t) = t + iy_b$, com $x_0 \leq t \leq x$ e y fixo. Ao fazermos isso, o integral pode ficar assim:

$$g(b) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{x_0}^{x} f(t+iy)\,\mathrm{d}t\,.$$

Agora usem o teorema fundamental do cálculo (da reta real) para derivar em ordem a x. (Reparem que o integral ao longo de γ_1 é constante em relação a x.)

(c) Usando um caminho γ que termine num segmento vertical, calculem $\frac{\partial g}{\partial y}(b)$.

(d) Usem as equações de Cauchy–Riemann (notem que as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ são contínuas) para mostrar que g é diferenciável em b e que $g'(b) = f(b)$.

(4.9) Vale a pena pensarmos no significado geométrico das equações de Cauchy–Riemann. Se f for diferenciável no ponto a e $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ for a sua forma cartesiana, então a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

corresponde a um número complexo, que tem alguma forma polar $re^{\theta i} = r\cos\theta + ir\sin\theta$. Isto significa que a matriz pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

ou seja, o seu efeito é idêntico ao do produto por um complexo: uma expansão ou contração, combinada com uma rotação. Assim, se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$, então f é *conforme* nesse ponto, ou seja, f preserva os ângulos entre vetores tangentes a curvas passando pelo ponto a.

(4.10) Suponham agora que f é uma função holomorfa no ponto a, que $f(a)=b$ e $f'(a)\neq 0$. Então f é injetiva numa vizinhança de a. (De outra forma, haveria uma sucessão $a_n \to a$ com $f(a_n) = f(a)$, o que obrigaria a $f'(a) = 0$. Veem porquê?). Assim, existe uma função contínua g (a inversa de f) satisfazendo $g(f(z)) = z$ numa vizinhança de $z = a$ e $f(g(w)) = w$ numa vizinhança de $w = b$. Usando a continuidade de g, seguida da substituição $z = g(w)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{w\to b} \frac{g(w)-g(b)}{w-b} &= \lim_{g(w)\to g(b)} \frac{g(w)-g(b)}{f(g(w))-f(g(b))} \\ &= \lim_{z\to a} \frac{z-a}{f(z)-f(a)} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{1}{f'(a)}, \end{aligned}$$

mostrando que g é diferenciável em b e que $g'(b) = 1/f'(a)$.

Quando definimos os ramos do logaritmo em (3.24), tínhamos uma função $f : \Omega \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z$ injetiva num domínio Ω aberto e conexo por arcos, e construímos a sua inversa g. Por exemplo, para o ramo principal do logaritmo, pusemos

$$g(f(x+iy)) = x+iy, \quad \text{se } x,y \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \,]-\pi,\pi[.$$

Isto corresponde à escolha $\Omega = \{x+iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y \in \,]-\pi,\pi[\}$. A restrição em y assegura que f é injetiva (de outra forma não seria possível definir a sua inversa). Nestas condições, o parágrafo anterior garante que g é holomorfa no seu domínio (conseguem verificar todos os detalhes?). Se escolhermos um conjunto Ω diferente, a função g também será diferente—ou seja, cada escolha de Ω corresponde a um "ramo" diferente da "função inversa".

Em (3.26), definimos $z \mapsto z^\alpha$ com base no logaritmo. Como a função logaritmo é holomorfa, o mesmo se passa com as funções potência. Na discussão e exemplos de (3.19), também constatámos que funções como arccos, arcsin, e arctan podem ser definidas usando o logaritmo. Como tal, também elas são holomorfas.

(4.11) As equações de Cauchy–Riemann têm algumas consequências simples para a parte real u e a parte imaginária v de uma função holomorfa $f = u + iv$. Usando as equações, podemos calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

Ou seja, u é uma função *harmónica*. Usando o mesmo método, podemos mostrar que v também é harmónica. Assim, para verificar se uma função u pode ser parte real (ou imaginária) de uma função holomorfa, basta verificar se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (ou seja, se u é harmónica). Quando u e v são as partes real e imaginária de uma mesma função f (ou seja, satisfazem as equações de Cauchy–Riemann), dizemos que são *harmónicas conjugadas*.

(4.12) *Exercício.* Quais das seguintes funções são a parte real u de uma função holomorfa (no respetivo domínio) f? Quais as partes imaginárias v correspondentes?

$x, y \mapsto x^2 + y^2$; $\quad x, y \mapsto x^2 - y^2$; $\quad x, y \mapsto x^3 - 3xy^2 + 4xy$;

$x, y \mapsto x^3 - 4xy^2 + 4xy$; $\quad x, y \mapsto \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$; $\quad x, y \mapsto \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2}$;

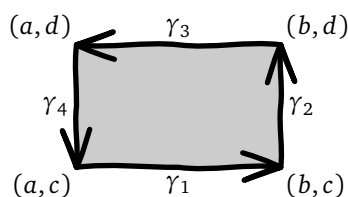
$x, y \mapsto (\cos x)\, e^{-y}$; $\quad x, y \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$; $\quad x, y \mapsto x\, e^{-2x} \sin(2y) + y\, e^{-2x} \cos(2y)$;

$x, y \mapsto x\, e^{2x} \sin(2y) + y\, e^{2x} \cos(2y)$.

(4.13) *Exercício.* Quais dessas funções são a parte imaginária v de uma função holomorfa (no respetivo domínio) f? Quais as partes reais u correspondentes?

(4.14) DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE CAUCHY. O teorema de Green diz-nos que, se a região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é limitada por um caminho (ou por um conjunto de caminhos) "suficientemente regular", que designamos $\partial\Omega$, e se P e Q são funções C^1, então

$$\int_{\partial\Omega} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vale a pena rever como se prova o teorema num caso simples. Suponham que $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ e que dividimos o bordo $\partial\Omega$ em quatro pedaços: γ_1, γ_2, γ_3, e γ_4 (com a

orientação habitual). Então,

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]_{x=a}^{b} \mathrm{d}y - \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{y=c}^{d} \mathrm{d}x \\ &= \int_c^d Q(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d Q(a,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b P(x,d)\,\mathrm{d}x + \int_a^b P(x,c)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Mas estes são os integrais de $(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$ ao longo de γ_2, γ_4, γ_3, e γ_1, por esta ordem.

Notem que contámos explicitamente com o bom comportamento de (P,Q) no interior de Ω; sem isso, não poderíamos usar o teorema fundamental do cálculo para avaliar os integrais.

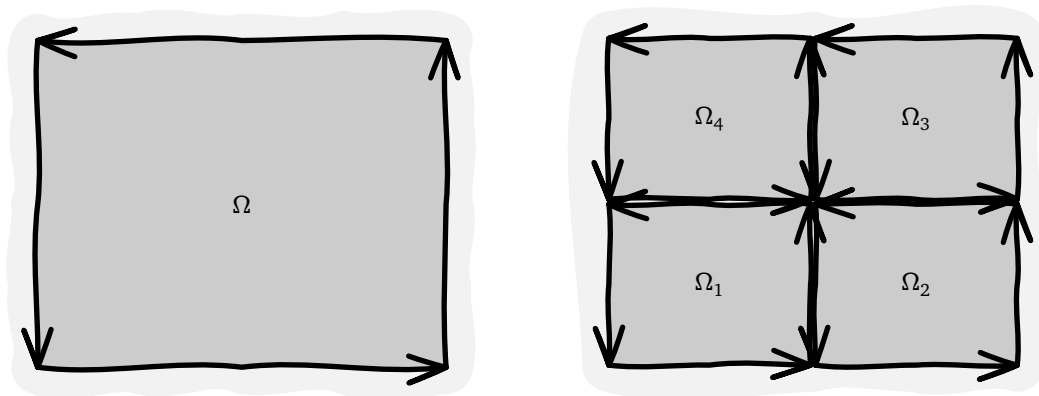
(4.15) *Exercício.* Escolham uma função f holomorfa numa região Ω e ao longo do seu bordo $\partial\Omega$, formado por um ou mais caminhos "suficientemente regulares", como em (2.20). Escrevemos a forma cartesiana de f como $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Então temos:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} (u+iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_{\partial\Omega} (u\,\mathrm{d}x + iu\,\mathrm{d}y + iv\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y).$$

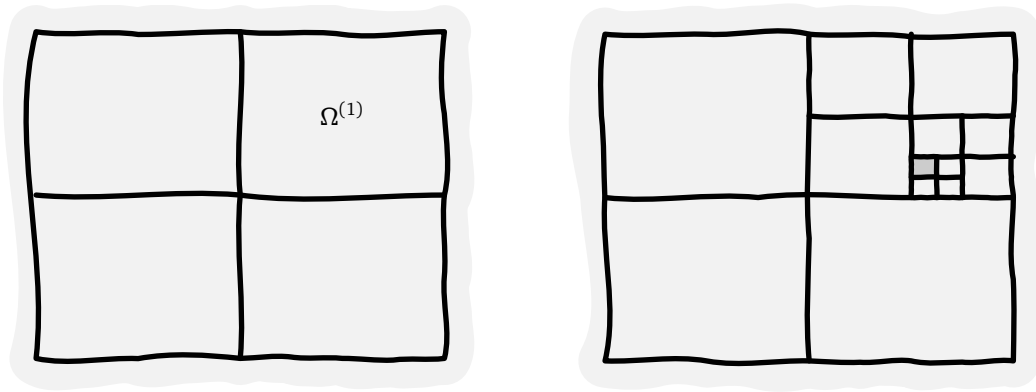
Justifiquem estas identidades. Usem o teorema de Green para calcular o integral e obter o teorema de Cauchy.

(4.16) Essa demonstração do teorema de Cauchy só funciona se assumirmos que f tem derivada contínua (pelo menos se usarmos a versão tradicional do teorema de Green). Mas o teorema pode ser demonstrado mesmo se não soubermos *a priori* que f' é contínua. Começamos por mostrar que o teorema de Cauchy é válido se Ω for um retângulo. Imaginem que tínhamos

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0.$$

Chamem J ao valor do integral e A à área do retângulo. Se $J \neq 0$, definimos $g : z \mapsto \frac{A}{J} f(z)$, que também é holomorfa, e cujo integral é A (verifiquem!). Se dividirmos o retângulo em

quatro retângulos iguais (chamemos-lhes Ω_1, Ω_2, Ω_3, e Ω_4), ficamos com

$$A = \int_{\partial\Omega} g(z)\,dz = \int_{\partial\Omega_1} g(z)\,dz + \int_{\partial\Omega_2} g(z)\,dz + \int_{\partial\Omega_3} g(z)\,dz + \int_{\partial\Omega_4} g(z)\,dz,$$

pois os integrais ao longo dos novos segmentos cancelam-se uns aos outros. Pelo menos um dos integrais tem módulo maior ou igual a $A/4$; se assim não fosse, o módulo da soma seria menor que A (e não é). Como cada um dos retângulo tem área $A/4$, concluímos que, pelo menos para um deles, o integral ao longo do bordo tem módulo maior ou igual à área. Chamemos $\Omega^{(1)}$ a esse retângulo.

Aplicamos o mesmo processo a $\Omega^{(1)}$, para obter um retângulo $\Omega^{(2)}$ para o qual o integral ao longo do bordo tem módulo maior ou igual à área. Ao fim de n passos, obtemos um retângulo $\Omega^{(n)}$ para o qual

$$\left| \int_{\partial\Omega^{(n)}} g(z)\,dz \right| \geq \text{área de } \Omega^{(n)}.$$

Há exatamente um ponto comum a todos os retângulos; chamemos-lhe λ. Como a função g é diferenciável em λ (pois estamos a assumir que f, e portanto g, são holomorfas em $\Omega \cup \partial\Omega$), temos

$$\lim_{z\to\lambda} \frac{g(z) - g(\lambda)}{z - \lambda} = g'(\lambda) \in \mathbb{C}.$$

Isto significa que, se escrevermos

$$h(z) = \frac{g(z) - g(\lambda) - g'(\lambda)(z - \lambda)}{z - \lambda} \quad \text{para } z \neq \lambda$$

e pusermos $h(\lambda) = 0$ (para ser uma função contínua), então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança de λ na qual $|h(z)| < \varepsilon$.

Escolhemos algum $\Omega^{(n)}$ contido nessa vizinhança. Temos então (verifiquem cada passo)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^{(n)}} g(z)\,dz &= \int_{\partial\Omega^{(n)}} \big(g(\lambda) + g'(\lambda)(z-\lambda) + h(z)(z-\lambda)\big)\,dz \\ &= \underbrace{\int_{\partial\Omega^{(n)}} \big(g(\lambda) + g'(\lambda)(z-\lambda)\big)\,dz}_{0} + \int_{\partial\Omega^{(n)}} h(z)(z-\lambda)\,dz\,. \end{aligned}$$

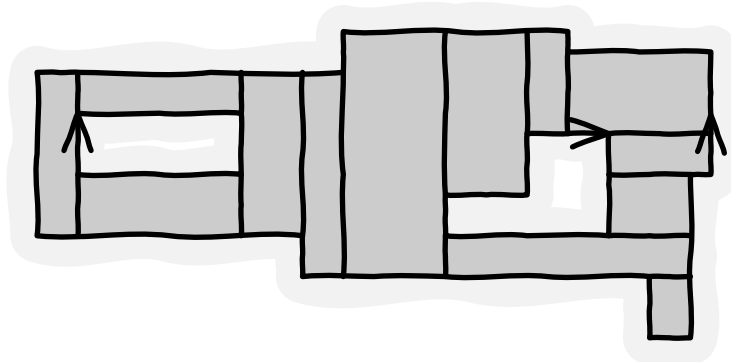
Recordando o exercício (2.17), vemos que primeiro integral é 0, pois a função a integrar é primitivável. Se ℓ e ℓ' forem os lados do retângulo, é nítido que $|z-\lambda| < \ell + \ell'$ e que o comprimento do bordo é $2\ell + 2\ell'$. De acordo com o exercício (2.16), obtemos então

$$\left|\int_{\partial\Omega^{(n)}} h(z)\,(z-\lambda)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\partial\Omega^{(n)}} \underbrace{|h(z)|}_{\leq\varepsilon}\,\underbrace{|z-\lambda|}_{\leq\ell+\ell'}\,\mathrm{d}z < \varepsilon\,(\ell+\ell')(2\ell+2\ell') = 2(\ell+\ell')^2\,\varepsilon,$$

o que contradiz (se escolhermos ε suficientemente pequeno) a conclusão anterior, que

$$\left|\int_{\partial\Omega^{(n)}} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \geq \text{área de } \Omega^{(n)} = \ell\ell'$$

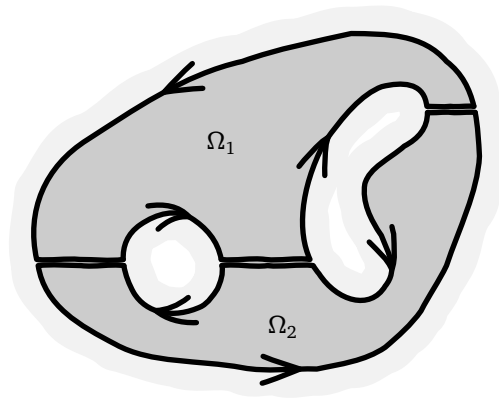
(notem que a proporção entre ℓ e ℓ' não depende de n). Mas o único passo onde assumimos algo que não conhecíamos foi logo no início, quando admitimos a possibilidade $J \neq 0$. Vemos assim que tal não pode acontecer e o integral é sempre 0.

(4.17) Isto mostrou que o teorema é válido se Ω for um retângulo. Mas se Ω for obtido colando um número finito de retângulos ao longo (de partes) dos seus bordos, então o integral em cada retângulo é 0, e portanto somando as contribuições de todos, e cancelando os segmentos ao longo de bordos comuns (porque são percorridos duas vezes, mas em sentidos opostos), vemos que o integral também é 0 ao longo do bordo de Ω.

Quer isto dizer que o integral de f é 0 ao longo de caminhos fechados formados apenas por segmentos horizontais e verticais (desde que não haja singularidades ao longo do caminho nem no interior da região limitada por ele—veem porquê?).

Neste ponto vale a pena recordar o nosso objetivo: mostrar que se f é holomorfa num conjunto Ω e ao longo seu bordo $\partial\Omega$, e se esse bordo consiste num número finito de caminhos suficientemente regulares, então o integral de f ao longo de $\partial\Omega$ é 0.

Consideramos primeiro o caso em que o bordo $\partial\Omega$ é formado por apenas um caminho. Exemplos de conjuntos Ω nessas condições incluem bolas, retângulos, conjuntos convexos, ou outros conjuntos simplesmente conexos. Neste caso, nenhum caminho γ dentro de Ω contorna quaisquer singularidades (porquê?). Estamos portanto nas condições do exercício (4.8), que nos permite concluir que f é primitivável. Mas então o exercício (2.17) mostra que o integral de f ao longo de $\partial\Omega$ é 0. (Reparem que na verdade estamos a usar que f é primitivável numa vizinhança de Ω, que podemos escolher de forma a assegurar que não há

problemas com singularidades. Conseguem verificar os detalhes?) De facto, este argumento é válido para qualquer caminho γ fechado, suficientemente regular, e contido em Ω.

Consideramos agora o caso em que $\partial\Omega$ é formado por mais do que um caminho. Neste caso, podemos dividir Ω em Ω_1 e Ω_2, de forma a que cada caminho de $\partial\Omega$ fique dividido em dois pedaços (um que fará parte de $\partial\Omega_1$, outro de $\partial\Omega_2$), e ligá-los com caminhos adicionais, percorridos uma vez num sentido e outra no sentido oposto (e portanto os integrais para cada sentido cancelam-se). Assim, o integral ao longo de $\partial\Omega$ é igual à soma dos integrais ao longo de $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$. Como cada um destes novos bordos é formado por apenas um caminho fechado, o integral ao longo deles é 0, e portanto o mesmo se passa com o integral ao longo do bordo original $\partial\Omega$.

E o que são caminhos "suficientemente regulares"? São aqueles para os quais conseguimos pôr estas demonstrações—incluindo a estimativa em (2.16)—a funcionar. Por exemplo, podemos exigir que o caminho seja formado por um número finito de troços, e que cada troço seja parte de um caminho γ ligeiramente maior, ao longo do qual a derivada γ' seja um vetor contínuo não-nulo (isto dá-nos uma margem de manobra para contas nos extremos de cada troço). Em todos os casos precisamos que o caminho tenha comprimento finito.

Vale a pena mencionar que também podemos adaptar estas conclusões a caminhos com um número finito de autointerseções. Se desenharem um tal caminho (por exemplo, desenhem um caminho que dê duas voltas à origem), veem que podemos sempre cortá-lo em pedaços e com esses pedaços formar vários caminhos fechados que não se autointersetam e aos quais podemos aplicar o teorema de Cauchy.

(4.18) Recordem que uma *homotopia* entre dois caminhos fechados $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ é uma função contínua $\eta : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} : s,t \mapsto \eta(s,t)$ tal que, se escrevermos $\eta_s : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \eta(s,t)$ (com $0 \le s \le 1$ fixo), cada η_s é um caminho fechado, $\eta_0 = \gamma_0$, e $\eta_1 = \gamma_1$. Vamos considerar apenas homotopias em que cada η_s (com $0 \le s \le 1$ fixo) e cada $s \mapsto \eta(s,t)$ (com $0 \le t \le 1$ fixo) são caminhos suficientemente regulares.

Suponham que f é holomorfa no aberto Ω e que $\eta(s,t) \in \Omega$ para todos os s,t. Queremos mostrar que

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Para tal, vamos usar uma versão simplificada da subdivisão de retângulos que usámos em

(4.16). O argumento é bastante mais simples do que parece à primeira vista (porque é preciso muitas palavras para descrever o que está a acontecer, que na verdade é muito pouco). Por isso, avancem com calma e vão verificando que todos os passos fazem sentido.

Começamos por abreviar $Q_0 = [0,1] \times [0,1]$ e notar que a imagem $\eta(\partial Q_0)$ de ∂Q_0 por η é um caminho fechado formado por quatro pedaços: o caminho $s \mapsto \eta(s,0)$, o caminho γ_1, o caminho $s \mapsto \eta(s,1)$ percorrido no sentido oposto, e o caminho γ_0 percorrido no sentido oposto. Como o primeiro e o terceiro pedaços coincidem mas são percorridos em sentidos opostos (concordam?), os integrais de f ao longo deles cancelam-se. Desta forma, o integral ao longo dos quatro pedaços reduz-se apenas a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z$$

e o nosso objetivo é mostrar que é 0 (porquê?).

Se o integral não for 0, dividimos o quadrado Q_0 em quatro quadrados iguais (cada um com lado $1/2$), e consideramos as imagens por η do bordo de cada um dos novos quadrados. Cada uma das quatro imagens é um caminho fechado, e a soma dos integrais ao longo dos quatro caminhos é igual ao integral ao longo do caminho original $\eta(\partial Q_0)$. Portanto, se o integral ao longo de $\eta(\partial Q_0)$ não é 0, pelo menos um dos quatro novos integrais também não é 0. Escolhemos um deles, e chamamos Q_1 ao quadrado correspondente.

Da mesma forma, subdividimos Q_1 em quatro quadrados iguais (cada um com lado $1/4$) e como o integral ao longo de $\eta(\partial Q_1)$ não é 0, podemos escolher um dos novos quadrados para Q_2 sabendo que o integral ao longo de $\eta(\partial Q_2)$ também não é 0. Repetindo sempre o mesmo processo, construímos uma sequência de quadrados Q_n (com lado $1/2^n$) encaixados uns nos outros, e com integral não-nulo ao longo de $\eta(\partial Q_n)$.

As imagens $\eta(Q_n)$ têm exatamente um ponto λ em comum, o qual, estando na imagem de η, é um ponto de Ω (porquê?). Logo, f é holomorfa em λ e existe uma vizinhança Ω' de λ na qual f é primitivável (de acordo até aqui?). Além disso, usando a continuidade de η, podemos concluir que existe algum $\eta(Q_n)$ (não só o bordo, mas também o interior) contido em Ω'. Mas isso mostra (porquê?) que o integral ao longo de $\eta(\partial Q_n)$ tem de ser 0, ao contrário do que pensávamos. Somos portanto forçados a concluir que o integral original também tinha de ser 0 e que é realmente verdade que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

(4.19) *Exercício.* Considerem agora um caminho fechado $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ suficientemente regular, possivelmente com autointerseções, que se mantém sempre fora de $\{z : |z| \leq \varepsilon\}$. Se o parametrizarmos em coordenadas polares, obtemos $\gamma(t) = r(t)\,e^{\theta(t)i}$. (Qual é a dificuldade em definir θ? Conseguem evitá-la?) Usando esta parametrização, mostrem que

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \Big(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t)\Big)\,\mathrm{d}t = i\theta(1) - i\theta(0).$$

Tendo em conta que γ é um caminho fechado, que valores são possíveis para $\theta(1) - \theta(0)$? O que podem concluir sobre os valores possíveis desse integral?

(4.20) Recordemos então a discussão em (2.22): se

$$\underbrace{\cdots + \frac{u_{-6}}{z^6} + \frac{u_{-5}}{z^5} + \frac{u_{-4}}{z^4} + \frac{u_{-3}}{z^3} + \frac{u_{-2}}{z^2}}_{\substack{\text{subsérie com expoentes menores ou iguais a } -2; \\ \text{é primitivável no interior da região de convergência.}}} + \frac{u_{-1}}{z} + \underbrace{u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4 + \cdots}_{\substack{\text{subsérie com expoentes maiores ou iguais a 0;} \\ \text{é primitivável no interior da região de convergência.}}}$$

for a série de Laurent para f convergente em volta de $z = 0$, só a parcela de expoente -1 não é primitivável. No próximo episódio, vamos verificar que é possível primitivar as restantes parcelas termo-a-termo, e daí concluir que os seus integrais ao longo de caminhos fechados são 0. Acabámos de ver que a parcela de u_{-1} tem integral $2\pi n u_{-1} i$, onde n é o número de voltas que o caminho γ dá em torno de $z = 0$ (também chamado o *índice* de γ em torno de 0) e $u_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$. Para séries centradas noutro ponto $z = a$, todo este raciocínio se aplica, exceto que usamos potências de $(z - a)$ e que consideramos

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

Naturalmente, se γ contornar várias singularidades podemos decompor γ em vários caminhos (cada um contornando exatamente uma singularidade), e aplicar o raciocínio acima para cada uma dessas singularidades. Se escrevermos $n(\gamma, a)$ para indicar o índice de γ em torno de a, obtemos a versão mais completa do teorema dos resíduos:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\text{sing. } a} n(\gamma, a) \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

(4.21) *Exercício**. Suponham que $f(z)$ é holomorfa e limitada em $\Omega' \supset \{z : |z-a| \le \varepsilon\}$, com $M = \max_{z\in\Omega'} |f(z)|$. Usem o exercício (2.16) para mostrar que

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$$

converge para 0 quando $\varepsilon \to 0$. Por outro lado, desde que ε seja suficientemente pequeno (para quê?), o integral não depende de ε (porquê?). Qual é o único complexo compatível com ambas as condições? Qual é então o valor do integral? Que conclusões podem tirar?

(4.22) *Exercício.* Suponham agora que $f(z) = g(z)/(z-a)$ para alguma função g holomorfa em $\{z \in \Omega : |z-a| \le \varepsilon\}$. Podemos então escrever

$$f(z) = \underbrace{\frac{g(z) - g(a)}{z-a}}_{f_1(z)} + \underbrace{g(a) \cdot \frac{1}{z-a}}_{f_2(z)}.$$

(a) Usem a conclusão do exercício anterior para mostrar que

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f_1(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

(b) Fixamos $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : a + \varepsilon e^{it}$. Mostrem que $\gamma'(t) = i(\gamma(t) - a)$.

(c) Calculem

$$\int_\gamma f_2(z)\,\mathrm{d}z = g(a)\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(4.23) A fórmula de Cauchy segue diretamente deste exercício: se g é uma função holomorfa em $\{z \in \Omega : |z-a| \leq \varepsilon\}$, então

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{g(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, g(a).$$

De facto, não precisamos de restringir-nos a esse tipo de caminho; se γ for um caminho fechado simples (isto é, sem autointerseções) contornando a no sentido positivo, e g for holomorfa ao longo e dentro de γ (porquê todas estas restrições?), então

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, g(a).$$

(Veem porquê?) No caso de um caminho fechado com índice n em torno de a (que restrições é preciso impor?), o integral ficará $2\pi i n\, g(a)$.

(4.24) A regra de Leibniz. Tal como a fórmula de Cauchy nos permite escrever uma função holomorfa como um integral, é razoável perguntar em que circunstâncias um tal integral dá origem a uma função holomorfa.

Mais concretamente, fixemos um aberto Ω e um caminho γ suficientemente regular. Digamos que $f : z, w \mapsto f(z,w)$, definida para $z \in \Omega$ e w ao longo do caminho, é uma função contínua, e que para cada w fixo, a função $z \mapsto f(z,w)$ é holomorfa. Então a *regra de Leibniz* diz-nos que a função

$$F : z \mapsto \int_\gamma f(z,w)\,\mathrm{d}w$$

é holomorfa e a sua derivada é

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,w)\,\mathrm{d}w\,.$$

(4.25) *Exercício**. Para provar isto, vamos mostrar que

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(a,w)\,\mathrm{d}w$$

coincide com a definição (pelo limite) da derivada de F em $z = a$.

(a) Mostrem que a função g definida, para $z \in \Omega$ e w ao longo de γ, por

$$g(z,w) = \frac{f(z,w) - f(a,w)}{z-a}, \quad \text{se } z \neq a, \qquad \text{e} \qquad g(a,w) = \frac{\partial f}{\partial z}(a,w)$$

é uma função contínua.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, mostrem que é possível escolher $\delta > 0$ de modo que, para $|z-a| < \delta$ e qualquer w ao longo de γ, tenhamos $|g(z,w) - g(a,w)| < \varepsilon$. (Invoquem continuidade uniforme. Por que razão podem fazê-lo?)

(c) Usando os mesmos ε e δ da alínea anterior, majorem

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(a,w)\,\mathrm{d}w\right|$$

e mostrem que esse módulo converge para 0 quando $z \to a$.

(d) Como concluir que F é holomorfa em Ω?

(4.26) *Exercício.* Conseguem usar a regra de Leibniz para obter a fórmula de Cauchy generalizada (para a derivada de ordem $n > 0$) a partir da fórmula de Cauchy (para a função sem derivada)?

(4.27) O PRINCÍPIO DA MÉDIA é uma consequência direta da fórmula de Cauchy. Se f é holomorfa numa vizinhança de a contendo o caminho $|z-a| = \varepsilon$ (bem como a região $|z-a| < \varepsilon$ contornada por ele) e parametrizarmos $z = a + \varepsilon e^{\theta i}$, com $0 \le \theta \le 2\pi$, então

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{\theta i})}{\varepsilon e^{\theta i}} i\varepsilon e^{\theta i}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{\theta i})\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Obtemos assim o *princípio da média*: o valor de f em a é a média dos seus valores ao longo de $|z-a| = \varepsilon$.

(4.28) *Exercício**. Vamos usar o princípio da média para mostrar o *princípio do módulo máximo*: se f é holomorfa no aberto Ω conexo por arcos e $|f|$ tem máximo (no interior de Ω), então f é constante.

(a) Seja $a \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\{z : |z-a| \le \varepsilon\}$ está contido em Ω. Mostrem que $|f(a)| \le \max_{|z-a|=\varepsilon} |f(z)|$.

(b) Sejam a e ε escolhidos como na alínea anterior. Mostrem que se $\min_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)| < \max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)|$, então $\min_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)| < |f(a)| < \max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)|$ (ou seja, $|f(a)|$ não coincide nem com o máximo nem com o mínimo).

(c) Sejam ainda a e ε escolhidos como na alínea anterior. Mostrem que se $|f(a)| = \max_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)|$, então $|f(z)|$ e $f(z)$ são constantes ao longo de $|z-a| = \varepsilon$.

(d) Seja a um ponto no interior de Ω no qual f tenha módulo máximo, e seja $\{z : |z-a| < \varepsilon\}$ uma vizinhança de a contida em Ω. Mostrem que f é constante nessa vizinhança.

(e) Seja b qualquer outro ponto de Ω e γ um caminho de a a b contido em Ω. Assumam que existe um número finito de bolas $\{z : |z-c_i| < \varepsilon\}$ $(1 \le i \le n)$ cuja união contém o caminho e tais que o centro de cada bola está contido na bola anterior. (Pode ser necessário encolher o ε escolhido na primeira alínea.) Conseguem usar esse caminho e as ideias das alíneas anteriores para mostrar que $f(a) = f(b)$?

(f) A parte tecnicamente delicada: conseguem mostrar que é possível escolher bolas de forma a que isso funcione?

(4.29) *Exercício.* Seja f uma função holomorfa em Ω. Fixamos um ponto $a \in \Omega$ e definimos, para todos os R tais que $\{z : |z-a| < R\} \subseteq \Omega$, a função $g : R \mapsto \max_{z:|z-a|=R} |f(z)|$ (qual o significado geométrico desta expressão?). Mostrem que g é crescente, e que se tiver dois valores iguais então f é constante.

(4.30) O teorema de Liouville é uma das propriedades mais surpreendentes das funções holomorfas, e uma consequência inesperada da fórmula de Cauchy generalizada. O enunciado diz apenas: se f é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ e f é limitada, então f é constante. A explicação é simples. De acordo com a fórmula de Cauchy (com $n = 1$ e $a = b$), temos

$$f'(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-b|=R} \frac{f(z)}{(z-b)^2} \, dz \, .$$

Agora usamos a estimativa (2.16): o comprimento da curva é $2\pi R$, e se f é limitada, existe algum M satisfazendo $|f(z)| < M$. Assim, ficamos com

$$|f'(b)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-b|=R} \frac{f(z)}{(z-b)^2} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \, 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Mas a fórmula de Cauchy é válida com qualquer R (pois a função não tem qualquer singularidade). Em particular, podemos deixar $R \to \infty$, caso em que $M/R \to 0$, mostrando que $|f'(b)| = 0$ (porquê?). Mas se $f'(b) = 0$ em todos os pontos, a função tem de ser constante.

(4.31) *Exercício.* Para verem se perceberam a demonstração, usem uma ideia semelhante para mostrar que se f é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, então f é um polinómio de grau até n. Comecem por usar a fórmula de Cauchy para obter uma expressão para $f^{(n+1)}$. (Qual a relação entre $f^{(n+1)}$ e polinómios de grau até n?)

(4.32) *Exercício.* Vamos usar o teorema de Liouville para provar o *teorema fundamental da álgebra*: se f é um polinómio não constante em $\mathbb{C}$, então f tem algum zero.

(a) Suponham que f não tem zeros. Mostrem que $g : z \mapsto 1/f(z)$ é holomorfa.

(b) Mostrem que g é limitada. O que podem concluir?

(c) Qual a implicação para f? Conseguem provar o teorema?

(d) Mostrem que $f(z)$ pode ser escrita como produto de fatores (possivelmente repetidos) da forma $(z - a)$ (onde a é um zero de f).

(e) Como é que isso justifica a afirmação que fizemos no início de (1.20) sobre polinómios sem raízes em comum?

(4.33) RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS.

(4.4) sim; sim; não; sim; não; sim; sim; não; não; sim; não; não; não; não; sim; não.

(4.6) $2x+3+i(2y)$; 1; $\dfrac{-2x^5+4x^3y^2+6xy^4-4x^3-4xy^2-2x}{(x^2+(y+1)^2)^2(x^2+(y-1)^2)^2}+i\dfrac{6x^4y+4x^2y^3-2y^5+4x^2y+4y^3-2y}{(x^2+(y+1)^2)^2(x^2+(y-1)^2)^2}$; $2x+2yi$; $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $-1+i$; $e^x\cos y+ie^x\sin y$.

(4.12) (em todas as respostas, C é uma constante arbitrária)
$u=x^2-y^2$, $v=2xy+C$;
$u=x^3-3xy^2+4xy$,
$v=3x^2y-y^3-2x^2+2y^2+C$;
$u=\dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}+C$;
$u=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}+C$;
$u=(\cos x)\,e^{-y}$, $v=(\sin x)\,e^{-y}+C$;
$u=x\,e^{2x}\sin(2y)+y\,e^{2x}\cos(2y)$,
$v=-x\,e^{2x}\cos(2y)+y\,e^{2x}\sin(2y)+C$.

(4.13) (em todas as respostas, C é uma constante arbitrária)
$v=x^2-y^2$, $u=-2xy+C$;
$v=x^3-3xy^2+4xy$,
$u=-3x^2y+y^3+2x^2-2y^2+C$;
$v=\dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$, $u=\dfrac{2x+y}{x^2+y^2}+C$;
$v=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, $u=\dfrac{y-2x}{x^2+y^2}+C$;
$v=(\cos x)\,e^{-y}$, $u=-(\sin x)\,e^{-y}+C$;
$v=x\,e^{2x}\sin(2y)+y\,e^{2x}\cos(2y)$,
$u=x\,e^{2x}\cos(2y)-y\,e^{2x}\sin(2y)+C$.

EPISÓDIO 5

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Até aqui, temos sempre *assumido* que, para todas as funções analíticas, a região de convergência da série vai até à singularidade mais próxima. Mas só o mostrámos para alguns tipos especiais de funções (as que se baseiam na série geométrica). Na verdade, ainda nem sequer sabemos se todas as funções holomorfas têm séries de potências. Neste episódio vamos finalmente mostrar que assim é.

Vamos começar com uma discussão um pouco técnica sobre convergência uniforme, que terá como conclusão principal que, em certas circunstâncias (ligeiramente mais gerais do que as que usámos no episódio 1), se pode integrar uma série de funções termo-a-termo. Combinando isso com a série geométrica e com a fórmula de Cauchy que já conhecemos, vamos encontrar diretamente séries de potências para quaisquer funções holomorfas, sem sequer precisar de verificar (porque será óbvio) que realmente convergem até à singularidade mais próxima.

(5.1) UMA SUCESSÃO DE CAUCHY é uma sucessão u para a qual

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_N\,\forall_{m,n>N}\ |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Uma forma diferente de apresentar a definição é

$$|u_m - u_n| \to 0 \quad \text{quando } m, n \to \infty.$$

(Ainda se lembram como se traduz de um formato para o outro?) Por vezes, é fácil mostrar que uma sucessão é de Cauchy, mesmo sem sermos capazes de calcular o seu limite. Também definimos sucessões de Cauchy em $\mathbb{R}^n$; a única alteração é que usamos a norma $\|\ \|$ de vetores em vez do módulo $|\ |$ de números.

Um facto importante (que viram no cálculo) é que as sucessões de Cauchy em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^n$ coincidem com as sucessões convergentes. Mas já vimos que, se fizermos corresponder $x + iy \in \mathbb{C}$ com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o módulo $|\ |$ em $\mathbb{C}$ coincide com a norma $\|\ \|$ em $\mathbb{R}^2$. Por isso, tudo o que dissermos envolvendo normas em $\mathbb{R}^2$, podemos dizer para os módulos em $\mathbb{C}$. Em particular, as sucessões de Cauchy em $\mathbb{C}$ também são convergentes. (Conseguem seguir o raciocínio?)

Um pequeno aparte: também aqui usamos a notação $n \mapsto u_n$, especialmente se permitir evitar ambiguidades. Por exemplo, se escrevermos $u : m \mapsto m + n$, estamos a falar de uma sucessão na variável m. Ou seja, $u_0 = n$, $u_1 = n + 1$, $u_2 = n + 2$, etc.

Como vamos discutir a convergência de séries, vale a pena recordar que a soma (ou o limite) da série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ é $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$ (quando existe). Se a série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ for indexada por $\mathbb{Z}$, a soma é $\lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}} \sum_{n=A}^{B} u_n$.

(5.2) *Exercício**. Sejam $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ as somas parciais da série $\sum u_n$. Verifiquem que "$N \mapsto S_N$ é uma sucessão de Cauchy" significa

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} u_n\right| \to 0 \quad \text{quando } M, N \to \infty \text{ com } N \geq M.$$

(5.3) *Exercício**. Fixamos uma série $\sum u_n$.

(a) Mostrem que

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |u_n| = \left|\sum_{n=M+1}^{N} |u_n|\right|.$$

(b) Mostrem que se $N \mapsto \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ é uma sucessão de Cauchy, então $N \mapsto \sum_{n=0}^{N} u_n$ também é. (Isto é menos confuso do que parece.)

(c) Concluam que se $\sum |u_n|$ converge, então $\sum u_n$ também converge.

(5.4) CONVERGÊNCIA ABSOLUTA. Dizemos que a série $\sum u_n$ *converge absolutamente* se $\sum |u_n|$ convergir. Se a série $\sum u_n$ convergir (com o significado habitual) e precisarmos de evitar confusões, dizemos que a série $\sum u_n$ *converge simplesmente*. Convenientemente, mostrámos no exercício anterior que se uma série convergir absolutamente, também converge simplesmente. (Veem porquê?) Isso é mais útil do que parece: como a sucessão das somas parciais de $\sum |u_n|$ é monótona, para mostrar que converge basta mostrar que é limitada. (Porquê?) Ou seja, para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, basta mostrar que $N \mapsto \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ é limitada. (Porquê?)

(5.5) *Exercício.* Suponham que $|u_n| \leq |v_n|$. Usando as ideias do parágrafo anterior, mostrem que se $\sum v_n$ converge absolutamente, então $\sum u_n$ converge.

(5.6) *Exercício.* Escolham uma série geométrica qualquer e mostrem que converge absolutamente em todos os pontos onde converge simplesmente.

(5.7) *Exercício.* Fixamos dois reais $\alpha < \beta$.

(a) Mostrem que $1/n^\alpha > 1/n^\beta$ se $n \geq 1$.

(b) Mostrem que $\sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha > \sum_{n=1}^{N} 1/n^\beta$.

(c) Mostrem que se $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\beta$ também converge. (Isto é mais fácil do que parece. Releiam o parágrafo (5.4).)

(d) Mostrem que

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

(Dividam o intervalo de integração em N pedaços de comprimento 1.) Avaliem o integral.

(e) Para que valores de α a sucessão das somas parciais $N \mapsto \sum_{n=1}^{N} 1/n^\alpha$ é limitada?

(f) Para que valores de α a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ converge?

(g) A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$$

converge?

(5.8) *Exercício.* Suponham que a série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolutamente e que $\sum_{n\geq 0} u_n = L$. Vamos mostrar que reordenar ou reagrupar os termos da série não afeta o limite. Para tal, consideramos uma sequência de conjuntos $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots$ com $\bigcup X_j = \mathbb{N}$ e definimos a sucessão $j \mapsto S_j = \sum_{n\in X_j} u_n$.

(a) Se $X_0 = \{10\}$, $X_1 = \{5, 10, 100\}$, $X_2 = \{0, 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100\}$, escrevam os primeiros três termos da sucessão $j \mapsto S_j$ correspondente tão explicitamente quanto possível.

(b) Se $X_0 = \{\text{múltiplos de } 6\}$, $X_1 = \{\text{números pares}\}$, $X_2 = \mathbb{N}$, escrevam (todos) os termos da sucessão $j \mapsto S_j$ correspondente tão explicitamente quanto razoável.

(c) Dado qualquer $\varepsilon > 0$, mostrem que existe uma ordem N tal que $\sum_{n>N} |u_n| < \varepsilon$ e $\left| L - \sum_{n=0}^{N} u_n \right| < \varepsilon$.

(d) Dada uma sequência de conjuntos X_j como especificado acima e um inteiro $N \geq 0$, mostrem que existe J tal que $\{0 \leq n \leq N\} \subseteq X_J$.

(e) Se N e J foram escolhidos como nas alíneas anteriores, mostrem que $|L - S_j| < 2\varepsilon$ sempre que $j \geq J$. Concluam que $S_j \to L$ quando $j \to \infty$.

(f) De que forma isto mostra que podemos reordenar ou reagrupar os termos da série livremente? Mostrem que a conclusão é válida para séries indexadas por qualquer outro conjunto numerável (em vez de $\mathbb{N}$).

(5.9) *Exercício**. Podemos usar o exercício anterior para justificar a definição (1.31) do produto de séries. Suponham que as séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\,(z-a)^n$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\,(z-a)^n$ convergem absolutamente no aberto Ω.

(a) Mostrem que a série $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} u_j\, v_k (z-a)^{j+k}$ indexada por j, k converge absolutamente em $z \in \Omega$ e determinem o seu limite.

(b) Dado n fixo, mostrem que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\, v_{n-j}\,(z-a)^n$ converge absolutamente em $z \in \Omega$.

(c) Usem o exercício anterior para mostrar que, para $z \in \Omega$,

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\,(z-a)^j\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k\,(z-a)^k\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\, v_{n-j}\Big)\,(z-a)^n.$$

(5.10) RAIO DE CONVERGÊNCIA. Quase todas as demonstrações sobre convergência de séries de potências usam a mesma estratégia: comparar a série em que estamos interessados com uma série geométrica. Imaginem que temos a série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n$$

e que esta série converge (simplesmente) em $z = a$. Vamos mostrar que, se $|b| < |a|$, então a série converge *absolutamente* em $z = b$. A demonstração é curta. Se a série converge em

$z = a$, isso significa (porquê??) que $u_n\, a^n \to 0$, e portanto (porquê?) existe algum $M > 0$ tal que $|u_n\, a^n| \leq M$ (para todos os n). Mas então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|u_n\, b^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|u_n\, a^n\right| \, \left|\frac{b}{a}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \, \left|\frac{b}{a}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{b}{a}\right|^n .$$

A última série é uma série geométrica de razão $|b/a| < 1$, logo, é convergente. De acordo com o exercício (5.5), isso mostra que $\sum u_n\, b^n$ converge absolutamente. (Veem porquê?)

Mas isto significa que a região de convergência é um ponto (se a série só convergir em $z = 0$), ou um disco (ignorando o que se passa na fronteira), ou o plano todo. Com efeito, acabámos de mostrar que se a série converge em a, então converge (absolutamente) em qualquer b com $|b| < |a|$. Por isso faz sentido falar no *raio de convergência* (é o raio desse disco, ou ∞, se a série convergir no plano todo) e acabámos de ver que, se a série converge em a, então o raio é pelo menos $|a|$. Haverá alguma forma explícita (por pouco prática que seja) de determinar o raio de convergência?

Chamando R ao raio de convergência, se $|b| < R$ então b está no interior da região de convergência e podemos escolher a de modo que $|b| < |a| < R$. Nesse caso, $\sum u_n\, z^n$ converge em $z = a$. (De acordo até aqui?) Se $\sum u_n\, a^n$ converge, necessariamente $u_n\, a^n \to 0$ e $|u_n\, a^n| \leq M$ para algum $M > 0$ fixo. Mas então $\sqrt[n]{|u_n\, a^n|} \leq M^{1/n}$. Como $M^{1/n} \to 1$ quando $n \to \infty$, somos levados a

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n\, a^n|} \leq \limsup_{n\to\infty} M^{1/n}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}\, |a| \leq 1.$$

Como $|b| < |a|$, acabámos de mostrar

$$|b| < R \quad \Rightarrow \quad \limsup \sqrt[n]{|u_n|}\, |b| < 1.$$

Será que a implicação oposta também é válida? Sim. Se $\limsup \sqrt[n]{|u_n|}\, |b| < 1$, escolhemos a tal que $|b| < |a|$ e $\limsup \sqrt[n]{|u_n|}\, |a| < 1$ (ou seja, $|a|$ é só ligeiramente que $|b|$). Então, existe algum $M > 1$ tal que $|u_n\, a^n| < M$ (isto não é completamente óbvio—conseguem encontrar o M?). Mas agora o raciocínio em (5.10) mostra-nos que $|b| < |a| \leq R$. Acabámos de mostrar que

$$\limsup \sqrt[n]{|u_n|}\, |b| < 1 \quad \Rightarrow \quad |b| < R.$$

Resumindo: o raio de convergência é

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|u_n|}}$$

(ou ∞, caso $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} = 0$).

(5.11) *Exercício**. Suponham que $|u_n| \neq 0$ e que $|u_{n+1}/u_n| \to L$. Mostrem que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

(5.12) *Exercício.* Usem o exercício anterior para calcular os limites (com $n \to \infty$)

(a) $\lim \sqrt[n]{n}$; (b) $\lim \sqrt[n]{n\,(n-1)}$; (c) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}$; (d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$.

(5.13) *Exercício.* Mostrem que todas estas séries têm o mesmo raio de convergência:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\, u_n z^{n-1}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\, u_n z^{n-2}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n+1} z^{n+1}.$$

(5.14) *Exercício.* Seja $n \mapsto u_n$ qualquer sucessão limitada. Mostrem que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$$

tem raio de convergência ∞. Mostrem primeiro para o caso $u_n = 1$, e depois usem (5.5).

(5.15) O princípio da identidade. Estamos finalmente prontos para mostrar um facto algo surpreendente: se uma função f for analítica (nos pontos de) um aberto Ω (conexo por arcos) e tiver valor 0 num subconjunto de Ω contendo um ponto de acumulação, então $f = 0$.

Estamos a dizer que se existe uma sucessão de pontos $a_n \to a$, com $a_n, a \in \Omega$, $a_n \neq a$, e $f(a_n) = 0$, então $f = 0$. Porquê? Como a função é analítica nos pontos de Ω, é analítica pelo menos em a. Isso significa que f tem uma série de potências

$$f(z) = u_0 + u_1\,(z-a) + u_2\,(z-a)^2 + u_3\,(z-a)^3 + u_4\,(z-a)^4 + u_5\,(z-a)^5 + \cdots.$$

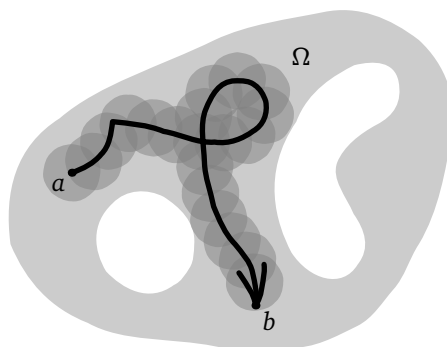
Assim, f é contínua. Em particular, $f(a) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = 0$. Logo $u_0 = f(a) = 0$. Mas se $u_0 = 0$, podemos pôr $(z-a)$ em evidência, e obter

$$f(z) = (z-a)\Big(\underbrace{u_1 + u_2\,(z-a) + u_3\,(z-a)^2 + u_4\,(z-a)^3 + u_5\,(z-a)^4 + \cdots}_{f_1(z)}\Big).$$

A série $f_1(z)$ tem o mesmo raio de convergência que $f(z)$, por isso também define uma função analítica. Além disso, temos $0 = f(a_n) = (a_n - a)\, f_1(a_n)$, mostrando que $f_1(a_n) = 0$. Mas então $u_1 = f_1(a) = f_1(\lim a_n) = \lim f_1(a_n) = 0$. Podemos pôr mais um $(z-a)$ em evidência. Desta vez, obtemos

$$f(z) = (z-a)^2\Big(\underbrace{u_2 + u_3\,(z-a) + u_4\,(z-a)^2 + u_5\,(z-a)^3 + \cdots}_{f_2(z)}\Big).$$

O mesmo género de raciocínio mostra que $u_2 = f_2(a) = 0$, e portanto pomos mais um $(z-a)$ em evidência, definimos uma função f_3, e usamo-la para mostrar que $u_3 = 0$. Por indução, mostramos que $u_n = 0$ para todos os n. Conclusão: todos os coeficientes da série são iguais a 0, e portanto $f = 0$, pelo menos dentro da região de convergência da série. Bom, mas se a série tem apenas termos iguais a 0, então o seu raio de convergência é ∞, o que significa que $f = 0$ no maior disco centrado em a e contido em Ω. (Percebem por que só podemos concluir isto?)

Com o que dissemos, podemos mostrar que $f = 0$ em todo o conjunto Ω. A ideia é a seguinte: para mostrar que $f(b) = 0$ (onde b é um ponto fora do disco inicial), escolhemos

um caminho de a para b contido em Ω (lembram-se que dissemos que Ω tinha de ser conexo por arcos?). Como Ω é aberto, há uma margem de segurança (de raio ε) à volta do caminho que está completamente contida dentro de Ω. Vamos tapando o caminho com discos de raio ε, e vamos usando o parágrafo anterior para mostrar que a função é igual a 0 em cada disco consecutivo. Mais cedo ou mais tarde, algum disco apanhará o ponto b, e acabamos por mostrar que $f(b) = 0$. (Conseguem preencher os detalhes? É preciso algum cuidado com os pormenores...)

Encontrámos assim o *princípio da identidade*: se duas funções analíticas (definidas num aberto Ω conexo por arcos) tiverem o mesmo valor num subconjunto de Ω (com algum ponto de acumulação), então elas são iguais (pois a sua diferença é constante e igual a 0).

(5.16) A CONVERGÊNCIA UNIFORME permite-nos descrever em que medida a convergência de uma sucessão de funções se faz mais ou menos ao mesmo ritmo em todos os pontos, ajudando-nos a perceber se é seguro trocar a ordem de limites.

Vamos fixar um conjunto Ω, uma sucessão de *funções* f_n definidas em Ω, e outra função f definida em Ω. Dizemos que f_n converge (pontualmente) para f se, em cada ponto $x \in \Omega$, tivermos $f_n(x) \to f(x)$. E o que significa $f_n(x) \to f(x)$? Significa que

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Ou seja, dizer que f_n converge pontualmente para f é dizer que

$$\forall_{x\in\Omega}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon,$$

Reparem que o N (quanto maior for, mais demora até que a distância entre $f_n(x)$ e $f(x)$ fique menor que ε) pode variar com x: pode perfeitamente acontecer que conforme variamos x, o N necessário (para esse x) fique cada vez maior. Se, dado o ε, o mesmo N servir para todos os x, isto é, se

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>N}\ \forall_{x\in\Omega}\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon,$$

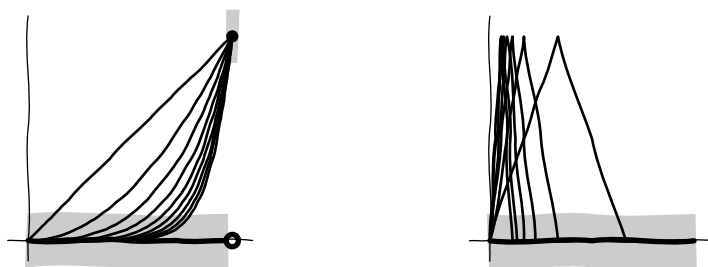
dizemos que f_n *converge uniformemente* para f. Vejamos alguns exemplos.

(5.17) *Exercício.* Definam $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (com $n \geq 1$) e determinem a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(a) Comparem

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1^-} f_n(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(b) Fixem $0<\varepsilon<1$ e n. Mostrem que existe $0<x<1$ com $|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$. (Talvez a figura ajude.) Concluam (como?) que f_n não converge uniformemente para f.

(c) Porém, se restringirmos o domínio a $[0,y]$ (onde $0<y<1$), f_n já converge uniformemente para f (nesse domínio mais pequeno). Conseguem mostrar isso? (Conseguem mostrar que $y^N<\varepsilon$ para algum N?)

(5.18) *Exercício.* Definam $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ (com $n\geq 1$) por

$$g_n(x)=\begin{cases}3nx, & \text{se } 0\leq x\leq \frac{1}{3n},\\ 2-3nx, & \text{se } \frac{1}{3n}\leq x\leq \frac{2}{3n},\\ 0, & \text{se } \frac{2}{3n}\leq x\leq 1.\end{cases}$$

Qual a função limite (pontual) $g:[0,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto \lim_{n\to\infty} g_n(x)$? A convergência é uniforme?

(5.19) *Exercício.* Suponham que $f_n\to f$ uniformemente, e que todas as f_n são contínuas. (Todas estas funções têm o mesmo domínio Ω.)

(a) Mostrem primeiro que

$$|f(x)-f(y)|\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|.$$

(b) Fixem $\varepsilon>0$. Mostrem que é possível fixar n tal que

$$x\in\Omega \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3.$$

(c) Fixem agora y. Mostrem que é possível escolher δ tal que

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/3.$$

(d) Combinando as conclusões anteriores, mostrem que f é contínua.

(5.20) *Exercício.* Seja Ω um aberto onde $f_n\to f$ uniformemente. Seja ainda γ um caminho (de comprimento finito) contido em Ω e suponham que cada f_n é contínua em Ω.

(a) Mostrem que f e todas as f_n são integráveis ao longo de γ. (Não compliquem!)

(b) Ponham $M_n = \max_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)|$ e mostrem que $M_n \to 0$ quando $n \to \infty$. (Usem a definição de continuidade uniforme.)

(c) Usem o exercício (2.16) para mostrar que $\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| \to 0$.

(d) Mostrem que $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$.

(5.21) *Exercício.* Seja Ω um aberto e sejam f_n funções diferenciáveis em Ω. Suponham que f_n' converge uniformemente para uma função g e que existe um ponto $a \in \Omega$ onde todas as f_n têm o mesmo valor C. Vamos mostrar que f_n converge para uma primitiva de g.

(a) Combinem o facto (que não depende deste exercício) de que as funções holomorfas são analíticas com o exercício (5.19) para mostrar que a função g é contínua.

(b) Usem o exercício (5.20) para mostrar que se γ é um caminho fechado contido em Ω então $\int_\gamma g = 0$.

(c) Usem integrais de caminho para construir uma primitiva f para g satisfazendo $f(a) = C$.

(d) Mostrem que $f_n \to f$ pontualmente.

(5.22) *Exercício**. Conseguem usar os três exercícios anteriores para mostrar que é possível derivar e primitivar séries termo-a-termo?

(5.23) *Exercício.* Considerem as séries

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{e} \qquad g : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Que função é representada por g? Qual o raio de convergência dessa série? Quais as singularidades da função? (Alguma coincidência interessante?) Mostrem que $f' = g$. Com base nisso, que função acham que é representada por f? Qual o raio de convergência de f? Preveem que essa função tenha singularidades em $\mathbb{C}$ (reparem que não tem nenhuma em $\mathbb{R}$)?

(5.24) *Exercício.* Considerem estas três séries:

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}; \qquad g : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}; \qquad h : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Qual a relação entre elas? Com base nessa relação, que funções diriam que são representadas pelas três séries? (Talvez seja mais fácil começar com h e andar para trás.) Qual o raio de convergência das séries? Mostrem que f converge em todos os pontos da fronteira da região de convergência, que g converge em alguns e não noutros, e que h não converge em nenhum.

(5.25) Como as séries não são mais que sucessões de somas parciais, também podemos dizer: Se tivermos uma série de funções contínuas convergindo uniformemente, então a conclusão é que podemos fazer o integral ao longo de γ termo-a-termo. (Veem porquê? Reparem que não podemos usar (5.21), pois esta conclusão é usada para provar os resultados invocados nesse exercício.)

À primeira vista, é difícil imaginar o alcance desta afirmação, mas de facto é com ela que vamos provar (sem grande esforço) que todas as funções holomorfas têm séries de potências e que vamos encontrar a fórmula integral de Cauchy (para o caso geral em que permitimos qualquer expoente natural no denominador).

Para podermos chegar a essas conclusões, falta-nos apenas um pedaço de informação: as séries geométricas convergem uniformemente em conjuntos no interior da região de convergência, desde que haja uma "margem de segurança" entre eles e a fronteira da região.

Ora, já sabemos desde o (1.9), que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \text{desde que } |z| < 1.$$

Temos portanto uma série de termo geral $f_n : z \mapsto z^n$ e uma função soma $f : z \mapsto 1/(1-z)$, e queremos mostrar que a série converge uniformemente em $|z| < 1 - \delta$ (onde δ dá a tal margem de segurança). Quem é a sucessão cujo limite estamos a calcular? É a sucessão das somas parciais,

$$S_N : z \mapsto \sum_{n=0}^{N} z^n.$$

Queremos estimar a diferença entre o limite f e cada termo S_N da sucessão. Ficamos com

$$f(z) - S_N(z) = \frac{1}{1-z} - \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{z^{N+1}}{1-z}.$$

Mas se $|z| < 1 - \delta$, então podemos fazer as seguintes majorações:

$$|f(z) - S_N(z)| = \left| \frac{z^{N+1}}{1-z} \right| \leq \frac{(1-\delta)^{N+1}}{\delta}.$$

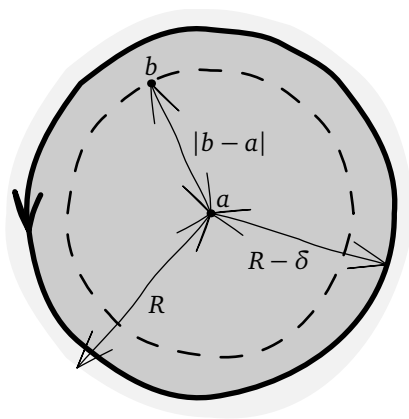
(5.26) *Exercício.* Com base no que fizemos até aqui, mostrem que $S_N \to f$ uniformemente em $\Omega = \{z : |z| < 1 - \delta\}$ (com δ fixo).

(5.27) *Exercício.* A série para $1/(1-z)$ convergente em $|z| > 1$ é

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Mostrem como adaptar as conclusões anteriores para mostrar que esta série converge uniformemente em $|z| > 1 + \delta$ (i.e., na região de convergência original, exceto uma margem de segurança à volta da fronteira).

(5.28) *Exercício.* Mostrem como adaptar as conclusões anteriores para as séries para funções da forma $\frac{a}{bz+c}$ com $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, independentemente da região de convergência escolhida para a série. Isto é, qualquer que seja o centro que escolhem, e quer escolham o lado de dentro ou o lado de fora, a convergência é uniforme se nos mantivermos a uma distância maior que δ da fronteira.

(5.29) Existência de séries de Taylor. Estamos finalmente prontos para provar que todas as funções holomorfas têm séries de potências. Fixamos uma função f holomorfa em $|z-a|<R$. Ou seja, supomos que não há qualquer singularidade cuja distância ao ponto a seja menor que R. Vamos encontrar uma série de potências e mostrar que converge uniformemente em $|z-a|<R-\delta$ (onde δ é a tal margem de segurança).

Se b for um ponto dentro da zona segura $|z-a|<R-\delta$, podemos usar a fórmula de Cauchy (2.23) para dizer que

$$f(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R-\delta}\frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z\,.$$

Como queremos uma série convergente em $|z-a|<R$, fazemos a mudança de variável $w=z-a$ e $z=w+a$, obtendo

$$f(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R-\delta}\frac{f(w+a)}{w-(b-a)}\,\mathrm{d}w\,.$$

Agora, precisamos de uma série de potências para $1/(w+a-b)$. Como $|w|=R-\delta$ e $|b-a|<R-\delta$ (pois b fica dentro da circunferência de centro em a e raio $R-\delta$), temos

$$\frac{1}{w-(b-a)}=\frac{1}{w}\,\frac{1}{1-\frac{b-a}{w}}=\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{b-a}{w}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{w^{n+1}},\qquad \text{se } |w|>|b-a|.$$

Mas agora reparem que há sempre uma margem de segurança entre o caminho percorrido pelo w e a circunferência de raio $|b-a|$ (que marca a fronteira da região de convergência da série). Portanto, ao longo do caminho $|w|=R-\delta$, a série converge uniformemente. Multiplicá-la pela função limitada $w\mapsto f(w+a)$ não afeta a convergência uniforme, e por isso podemos fazer a integração termo-a-termo:

$$\begin{aligned} f(b)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R-\delta}\frac{f(w+a)}{w-(b-a)}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R-\delta}f(w+a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w\\ &=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|w|=R-\delta}\frac{f(w+a)(b-a)^n}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(b-a)^n\int_{|w|=R-\delta}\frac{f(w+a)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

Resumindo tudo isto, acabámos de mostrar que, se f é holomorfa em $|z-a|<R$, e se b está no interior de $|z-a|<\varepsilon<R$, então f tem uma série de potências dada por:

$$f(b)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(b-a)^n\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

Mas lembram-se da série de Taylor? Já desde o (2.11) que sabemos que se f tem uma série de potências, então essa série é necessariamente

$$f(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

o que nos leva a concluir que, se f for holomorfa em $|z-a|\le\varepsilon$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Acabámos de encontrar a *fórmula de Cauchy generalizada*. (Notem que o raio da circunferência não é relevante; qualquer raio menor que R serve.)

(5.30) Uma primeira conclusão é que se uma função contínua é primitivável no aberto Ω, então é holomorfa: Como vimos a partir de (4.16), se a função é primitivável então podemos usar o teorema de Cauchy; como acabámos de ver, se podemos usar o teorema de Cauchy e não há singularidades, então a função tem séries de Taylor. Mas então pode ser derivada termo-a-termo, e portanto é holomorfa.

(5.31) *Exercício.* Suponham que f é uma função contínua no aberto Ω, e que

$$\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

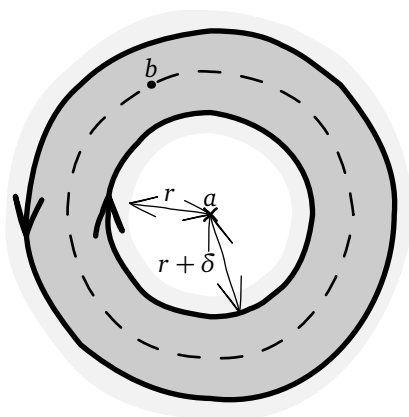
para todos os caminhos γ fechados e contidos em Ω. Mostrem o *teorema de Morera*: f é holomorfa em Ω.

(5.32) Existência de séries de Laurent. Uma variante de (5.29) permite-nos mostrar que há séries de potências convergentes em coroas circulares. Mais concretamente, se f for holomorfa em $r<|z-a|<R$, vamos obter uma série de potências que converge uniformemente em $r+\delta<|z-a|<R-\delta$ (mais uma vez, δ é a tal distância de segurança).

Tal como antes, se b é um ponto dentro da zona segura, a fórmula de Cauchy dá-nos

$$f(b)=\int_{|z-a|=R-\delta}\frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z-\int_{|z-a|=r+\delta}\frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z$$

(notem que o caminho de dentro vem com o sinal trocado, pois é percorrido no sentido oposto). O primeiro integral é totalmente idêntico ao que fizemos em (5.29):

$$\int_{|z-a|=R-\delta}\frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(b-a)^n\int_{|z-a|=R-\delta}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

Para o segundo integral, usamos uma estratégia semelhante. Começamos por mudar para $w = z - a$ e $z = w + a$, o que nos leva a

$$-\int_{|z-a|=r+\delta} \frac{f(z)}{z-b}\,\mathrm{d}z = -\int_{|w|=r+\delta} \frac{f(w+a)}{w-(b-a)}\,\mathrm{d}w\,.$$

Em seguida, calculamos a série para $-1/(w+a-b)$. Como $|w| = r+\delta$ e $|b-a| > r+\delta$ (pois b fica fora da circunferência de centro em a e raio $r+\delta$), queremos que a região de convergência seja $|w| < |b-a|$:

$$-\frac{1}{w-(b-a)} = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{1-\frac{w}{b-a}} = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(b-a)^n}, \qquad \text{se } |w| < |b-a|.$$

A região de convergência desta série termina na circunferência de raio $|b-a|$ e a convergência é uniforme ao longo do caminho (pois o caminho fica sempre a uma distância de segurança da fronteira da região de convergência). Mais uma vez, o produto pela função limitada $w \mapsto f(w+a)$ não afeta a convergência uniforme, o que nos permite integrar a série termo-a-termo. Temos então:

$$\begin{aligned}-\int_{|w|=r+\delta}\frac{f(w+a)}{w-(b-a)}\,\mathrm{d}w &= \int_{|w|=r+\delta}\frac{f(w+a)}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(b-a)^n}\,\mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^{n+1}}\int_{|w|=r+\delta} f(w+a)\,w^n\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

Notem que até podemos fazer uma mudança de índice: se pusermos $m = -n-1$ e $n = -m-1$, essa expressão fica

$$\sum_{m=-\infty}^{-1}(b-a)^m\int_{|w|=r+\delta}\frac{f(w+a)}{w^{m+1}}\,\mathrm{d}w$$

(ou seja, exatamente idêntica ao outro integral, mas desta vez só com expoentes negativos). Seja qual for a apresentação que preferirem, os dois integrais juntos, depois de voltarmos à variável z, ficam

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}(b-a)^n\int_{|z-a|=R-\delta}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z + \sum_{n=-\infty}^{-1}(b-a)^n\int_{|z-a|=r+\delta}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

Reparem que os raios dos dois caminhos podem ser ajustados: basta que fiquem entre r e R (pois basta que, ao ajustá-los, não os façamos passar por nenhuma singularidade). Mostrámos assim que f tem uma série de Laurent uniformemente convergente em $r + \delta < |z - a| < R - \delta$. (Como a série é a mesma independentemente de δ, se não precisarmos de convergência *uniforme* podemos omiti-lo.)

Isto ata a última ponta que tínhamos deixado solta, pois mostra que as funções holomorfas realmente têm séries de potências convergentes em coroas circulares com fronteiras marcadas pelas singularidades.

No caso particular em que a função é holomorfa em a, obtemos uma série convergente numa vizinhança de a, provando que a função é analítica em a. Se a função tem uma singularidade em a, obtemos ainda assim uma série de Laurent a partir da qual, usando (2.22), podemos obter o resíduo em a (ou eventualmente o total de todos os resíduos das singularidades contornadas pela região de convergência escolhida).

(5.33) Respostas de exercícios.

(5.8) (a) $S_0 = u_{10}$; $S_1 = u_{10} + (u_5 + u_{100})$; $S_2 = u_{10} + (u_5 + u_{100}) + (u_0 + u_2 + u_3 + u_{20} + u_{50})$.

(5.12) (a) 1. (b) 1. (c) 1. (d) 0.

(5.18) $g(x) = 0$; não.

(5.23) $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; 1; $\pm i$; $\arctan z$; 1.

(5.24) $h(z) = \dfrac{1}{1-z}$; $g(z) = -\log(1-z)$; $f(z) = z + (1-z)\log(1-z)$; 1.

EPISÓDIO 6

SINGULARIDADES E GEOMETRIA

No episódio 4, começámos a explorar mais a fundo as implicações de ser uma função holomorfa. Em particular, estudámos um pouco as equações de Cauchy–Riemann e algumas consequências diretas, e demonstrámos o teorema de Cauchy e algumas variantes. No episódio 5, focámo-nos nas propriedades das funções analíticas, e mostrámos que as funções holomorfas *são* as funções analíticas.

Neste episódio, vamos ver que todas as singularidades isoladas são causadas por alguma divisão por zero. Quando essa divisão dá origem a uma indeterminação do tipo $0/0$, é possível pôr os zeros do numerador e do denominador em evidência e ver se se cancelam (ou seja, levantar a indeterminação). Se os zeros do denominador são cancelados (por exemplo, algo como z/z), então o limite é um número e dizemos que a singularidade é *removível*. Se não são, então o limite é ∞, e dizemos que a singularidade é um *polo*. Quando a divisão por zero ocorre no argumento de uma função não racional (por exemplo, $\sin(1/z)$), então não existe limite e dizemos que a singularidade é *essencial*. O estudo das singularidades também nos vai permitir explorar alguns aspetos geométricos das funções em $\mathbb{C}$.

(6.1) A ESFERA DE RIEMANN E O PONTO ∞. Antes de prosseguir, pensemos qual o conceito útil (em $\mathbb{C}$) de convergência para ∞. Em geral (independentemente de estarmos em $\mathbb{C}$ ou noutro espaço), um conjunto é limitado se estiver contido nalguma bola de raio R (para algum $R > 0$). Por outro lado, se f for uma função contínua, dizemos que $f(t)$ “vai para infinito” quando $t \to a$ se, dado um conjunto limitado, podemos aproximar-nos o suficiente de a (ou seja, escolher $\varepsilon > 0$ e exigir $|t-a| < \varepsilon$) de modo a garantir que $f(t)$ fica fora desse conjunto. Há várias outras definições sobre “ir para infinito”, mas todas envolvem garantir que, mais cedo ou mais tarde, quem alegadamente “vai para infinito” fica fora de qualquer conjunto limitado previamente especificado.

Uma diferença fundamental entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é que se tirarmos um ponto a cada um deles, $\mathbb{R}$ fica dividido em duas partes separadas, enquanto $\mathbb{C}$ não fica.

Mais geralmente, o complemento de $\{x \in \mathbb{R} : |x| \le R\}$ (para algum $R > 0$ fixo) tem duas componentes: $]-\infty, -R[$ e $]R, +\infty[$. Se $f(t)$ vai para infinito quando $t \to a$ e nos aproximamos o suficiente de a, os valores de $f(t)$ ficam fora de $\{x \in \mathbb{R} : |x| \le R\}$. Mas se a função é contínua, esses valores ficam exclusivamente em $]-\infty, -R[$ ou em $]R, +\infty[$. Dessa forma, faz sentido e é frequentemente útil distinguir entre $f(t) \to -\infty$ e $f(t) \to +\infty$.

Já no plano complexo, o complemento de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ é conexo. Isto implica que, mesmo que $f(t)$ vá para infinito, consegue sempre ir “mudando de direção”, e portanto não é útil fazer distinções: no plano complexo faz mais sentido dizer simplesmente que $f(t) \to \infty$ e com isto incluir todas as direções. Na prática, dizer $f(t) \to \infty$ é sempre equivalente a dizer $|f(t)| \to +\infty$; dizer $z \to \infty$ é sempre equivalente a dizer $|z| \to +\infty$.

Para ver melhor o que se passa próximo de ∞, podemos aplicar a mudança de variável $w = 1/z$ (logo, $z = 1/w$) e definir $z \to \infty$ como equivalente a $w \to 0$ (e naturalmente, $w \to \infty$ como equivalente a $z \to 0$). Por exemplo,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2+3}{2z^2+z-7} = \lim_{w\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{w}\right)^2+3}{2\left(\frac{1}{w}\right)^2+\left(\frac{1}{w}\right)-7} = \lim_{w\to 0} \frac{4+3w^2}{2+w-7w^2} = 2.$$

Tudo funciona como nos habituámos no cálculo real, exceto que deixamos de fazer a distinção entre $-\infty$ e $+\infty$.

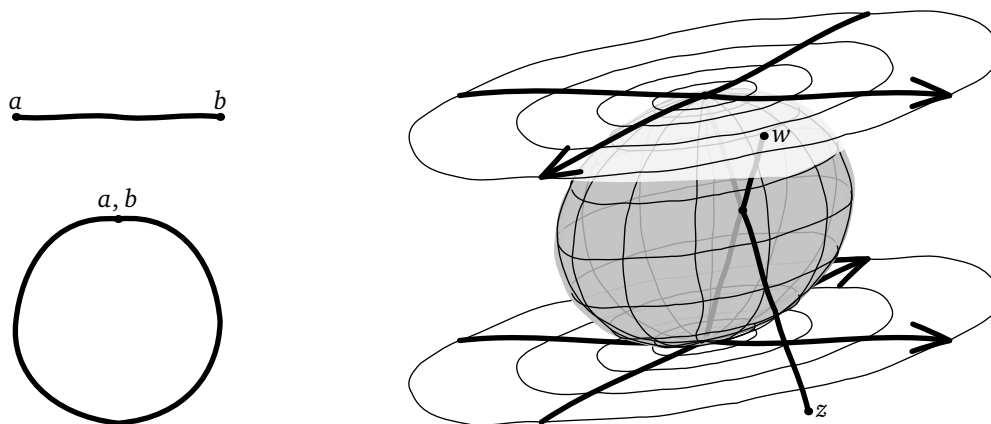
Há aqui um ponto-chave: como a mudança de variável é holomorfa (e portanto a sua inversa também o é), todas as propriedades que vimos das funções holomorfas são preservadas. Por exemplo, aplicando a mudança de variável à função

$$f : z \mapsto \frac{4z^2+3}{2z^2+z-7},$$

obtemos

$$f(z) = f(1/w) = \frac{4+3w^2}{2+w-7w^2}.$$

Como esta função é holomorfa em $w = 0$ (e tem valor 2 nesse ponto), faz sentido dizer que f é holomorfa no correspondente $z = \infty$ (e tem valor 2 nesse ponto). (Porém, notem que calcular a derivada antes ou depois de fazer a mudança de variável dá origem a respostas diferentes. Isso contradiz alguma coisa? O que se está a passar?)

Isto não é tudo. Imaginem que têm um segmento de reta $[a, b]$ e, permitindo-se fazer deformações, querem "colar" os pontos a e b, identificando-os. Obtêm um caminho fechado, de acordo? Pensemos então em z e w. Reparem que a mudança de variável nos dá uma bijeção entre $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (ou seja, $z = 0$ é excluído) e $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ (ou seja, $w = 0$ é excluído), que identifica os pontos mais afastados da origem (numa variável) com os mais próximos (na outra). Tentemos "colar" cada ponto z (exceto $z = 0$) com o seu correspondente $w = 1/z$ (exceto $w = 0$), identificando-os. É como se tentássemos embrulhar o plano de z à volta de uma superfície esférica, deixando de fora apenas um ponto da superfície (na posição de $w = 0$, que não tem z correspondente) e simultaneamente embrulhar o plano de w à volta da mesma superfície, deixando de fora apenas um ponto (na posição de $z = 0$, que não tem w correspondente).

A figura mostra uma parte dos dois planos (o plano de z em baixo, o de w em cima), bem como a chamada *esfera de Riemann* e a construção que permite relacionar z, o correspondente ponto da esfera, e o correspondente w. Na verdade, cada uma dessas correspondências é uma transformação conforme e tem várias outras propriedades. Porém, o nosso objetivo *não* é perceber esses detalhes (poderíamos ficar um episódio inteiro a discuti-los). As ideias-chave a reter são estas: faz sentido pensar na esfera de Riemann (ou seja, a superfície esférica a que estamos a aludir) como uma versão de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, as correspondências com z e w dão sistemas de coordenadas particularmente úteis na esfera de Riemann, e a correspondência entre z e w troca 0 com ∞ e ajuda a estudar valores próximo de ∞.

(6.2) CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES ISOLADAS. Se a é uma singularidade isolada de f, e f é limitada em $0 < |z-a| < \varepsilon$ (para algum $\varepsilon > 0$), então de acordo com o exercício (4.21) o teorema de Cauchy é válido em $|z-a| < \varepsilon$. Em particular, podemos usar a fórmula de Cauchy como em (5.29) para obter uma série de potências convergente em $|z-a| < \varepsilon$. Essa série define uma função holomorfa $\tilde{f}$ em $|z-a| < \varepsilon$, que coincide com f em $0 < |z-a| < \varepsilon$. Em particular, $\lim_{z\to a} \tilde{f}(z)$ existe e é um número complexo. Assim, encontrámos uma função holomorfa $\tilde{f}$ que coincide com f onde esta última está definida, e além disso não tem singularidade em a. Ou seja, "removemos" a singularidade. Resumindo: se f tem uma singularidade isolada em a e é limitada numa vizinhança de a com o ponto a removido, então o limite $\lim_{z\to a} f(z)$ existe e é um número complexo, a função f pode ser prolongada por continuidade ao ponto a, e a função prolongada é holomorfa em a. Nesse caso, dizemos que a é uma *singularidade removível* (alguns livros vão mesmo ao ponto de nem considerar estas singularidades como singularidades).

No caso seguinte, a é uma singularidade isolada de f e $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$. Definimos $g : z \mapsto 1/f(z)$. Esta função tem uma singularidade removível em a, pois $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Assim, temos uma série de potências $\tilde{g}(z)$, com $\tilde{g}(a) = 0$. Ora, a função $\tilde{g}$ não é constante igual a 0 (veem porquê?). Como tal, a sua série de potências centrada em a tem o seguinte aspeto:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(z) &= u_k\,(z-a)^k + u_{k+1}\,(z-a)^{k+1} + u_{k+2}\,(z-a)^{k+2} + u_{k+3}\,(z-a)^{k+3} + \cdots \\ &= (z-a)^k \underbrace{\big(u_k + u_{k+1}\,(z-a) + u_{k+2}\,(z-a)^2 + u_{k+3}\,(z-a)^3 + \cdots\big)}_{h(z)},\end{aligned}$$

com $u_k \neq 0$. Ou seja, há um primeiro coeficiente não-nulo (se não houvesse, $\tilde{g}$ seria constante igual a 0), e podemos pôr a potência correspondente em evidência. A série que fica para trás define uma função h com $h(a) = u_k \neq 0$. Dessa forma, podemos concluir que

$$f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{(z-a)^k\,h(z)} = \frac{1/h(z)}{(z-a)^k}.$$

Estamos na situação de não ter zero (em $z = a$) no numerador, e um zero de ordem k no denominador. De facto, como $z \mapsto 1/h(z)$ também é holomorfa e $1/h(a) \neq 0$, temos ainda

$$1/h(z) = v_0 + v_1\,(z-a) + v_2\,(z-a)^2 + v_3\,(z-a)^3 + \cdots,$$

com $v_0 = 1/h(a) \neq 0$, e portanto podemos escrever

$$f(z) = \frac{1/h(z)}{(z-a)^k} = \frac{v_0 + v_1\,(z-a) + v_2\,(z-a)^2 + v_3\,(z-a)^3 + \cdots}{(z-a)^k},$$
$$= v_0\,(z-a)^{-k} + v_1\,(z-a)^{-k+1} + v_2\,(z-a)^{-k+2} + v_3\,(z-a)^{-k+3} + \cdots .$$

Resumindo: se $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$, então f pode ser expressa (numa vizinhança de a) como o quociente de duas funções holomorfas, em que o numerador não tem zeros e o denominador tem um zero de ordem k, ou como uma série de potências de $(z-a)$ cujo primeiro coeficiente não-nulo é do expoente $-k$. Dizemos que a é um *polo de ordem k*.

Nos dois casos que vimos até aqui, obtivemos séries que tinham um "primeiro coeficiente não-nulo". Se o expoente for $-k < 0$, temos um polo de ordem k. Se o expoente for 0, temos uma singularidade removível e uma função sem zero nesse ponto. Se o expoente for $k > 0$, a singularidade é removível e a função tem um zero de ordem k. (Ou seja, na prática um polo de ordem k é como um zero de ordem $-k$ e vice-versa.)

Resta o caso em que a série não tem "primeiro coeficiente não-nulo": por mais baixo que seja o expoente, há sempre um expoente ainda mais baixo com coeficiente não-nulo. Neste caso, temos uma *singularidade essencial*. Mesmo que não saibamos a série de potências em $0 < |z-a| < \varepsilon$, este caso é fácil de detetar, pois, pelo *teorema de Casorati–Weierstrass*, próximo de uma singularidade essencial a função aproxima-se de todos os valores possíveis. Reparem: a função não pode ser limitada (senão a singularidade seria removível), logo há valores arbitrariamente próximos de ∞. Imaginem que a função nunca se aproximava do valor $b \in \mathbb{C}$. Então podíamos definir $g : z \mapsto 1/(f(z) - b)$, que seria uma função limitada, e portanto teria uma singularidade removível em a. Mas nesse caso $f(z) = b + 1/g(z)$ teria uma singularidade removível ou um polo em a.

(6.3) O caso mais importante é o dos polos (e singularidades removíveis), causados por zeros no denominador. Suponhamos que temos uma função da forma

$$f : z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$$

onde p e q são funções holomorfas. Suponhamos que queremos estudar a singularidade em $z = a$, causada por $q(a) = 0$. Nesse caso, tanto p como q têm séries de potências centradas em $z = a$. Pondo a potência de expoente mais baixo em evidência, temos $p(z) = (z-a)^m\,r(z)$ e $q(z) = (z-a)^n\,s(z)$, onde $m, n \geq 0$, e tanto $r(a)$ como $s(a)$ são não-nulos. Ou seja,

$$f(z) = \frac{(z-a)^m\,r(z)}{(z-a)^n\,s(z)} = (z-a)^{m-n}\underbrace{\big(v_0 + v_1\,(z-a) + v_2\,(z-a)^2 + v_3\,(z-a)^3 + \cdots\big)}_{\text{série para } \frac{r(z)}{s(z)},\ \text{com } v_0 = \frac{r(a)}{s(a)} \neq 0}$$

e a natureza da singularidade dependende apenas do sinal de $m - n$. Se $m - n < 0$, temos um polo de ordem $n - m$. De contrário, a singularidade é removível e a função obtida (ao remover a singularidade) tem um zero de ordem $m - n$ (ou não tem zero, se $m - n = 0$).

Isto significa que se considerarmos

$$\lim_{z\to a}\big((z-a)^k f(z)\big) = \lim_{z\to a}(z-a)^{k+m-n}\big(v_0 + v_1\,(z-a) + v_2\,(z-a)^2 + v_3\,(z-a)^3 + \cdots\big),$$

o limite será zero (se $k+m-n>0$), ou $v_0 \neq 0$ (se $k+m-n=0$), ou ∞ (se $k+m-n<0$). Dito de outra forma: se k for demasiado baixo, o limite é ∞; se k for precisamente a ordem do polo, o limite é um número não-nulo; se k for demasiado alto, o limite é 0. (E se não se tratar de um polo, mas sim de uma singularidade removível, logo com $k=0$ obtemos um número como limite.)

Uma forma alternativa de determinar a ordem do polo (ou do zero, se a singularidade for removível) é determinar diretamente m e n. É de facto relativamente simples: como a série do numerador $p(z)=(z-a)^m r(z)$ começa com o coeficiente de expoente m, a derivada de ordem m é a primeira com valor não-nulo em $z=a$; analogamente, a derivada de ordem n é a primeira (para o denominador $q(z)=(z-a)^n s(z)$) com valor não-nulo em $z=a$.

(6.4) Vejamos um exemplo. A função

$$f : z \mapsto \frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^4}.$$

tem um singularidade em $z=0$. Como o numerador é uma função holomorfa, vemos que f tem um polo de ordem no máximo 4 (ou até, possivelmente, uma singularidade removível) no ponto $z=0$. Como decidir rapidamente qual o tipo de polo?

Uma possibilidade é tentarmos adivinhar. Sabemos que a ordem está entre 0 e 4, por isso podemos experimentar com ordem 2. Se acertarmos, encontrámos a resposta. Se não, sabemos que ou é 3 ou 4, ou é 1 ou menos. Temos

$$\lim_{z\to 0}\left(z^2 \cdot \frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^4}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z + 2\sin z}{2z} = \infty.$$

(Na igualdade intermédia, usámos a regra de Cauchy, válida para indeterminações do tipo $0/0$.) Como o limite é ∞ concluímos que z^2 não é suficiente para cancelar os zeros do denominador, ou seja, que a ordem do polo é maior que 2. (De facto, até podemos notar que, após multiplicar por z^2 e aplicar a regra de Cauchy, o denominador continua com uma "vantagem" de ordem 1 em relação ao numerador, e por isso a ordem do polo é 3. Mas vamos continuar como se não tivessemos dado por isso...) Então podemos experimentar com ordem 3 ou 4. Experimentemos com ordem 3:

$$\lim_{z\to 0}\left(z^3 \cdot \frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^4}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z - 2\cos z + 1}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z + 2\sin z}{1} = 1.$$

Desta vez obtivemos um número não-nulo, e concluímos que a ordem era, realmente, 3.

Um caminho ligeiramente mais sistemático será usarmos a regra de Cauchy para calcular o limite original (no fim de contas, antes de começar, vale a pena verificar se, por acaso, estamos perante uma singularidade removível). Podemos continuar a usá-la enquanto tivermos indeterminações da forma $0/0$, e em cada utilização, calculamos uma derivada no numerador e outra no denominador, reduzindo a ordem de ambos os zeros, e portanto mantendo a diferença entre as ordens. Temos então

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^4} = \lim_{z\to 0}\frac{e^z + 2\sin z}{4z^3}.$$

Deste ponto em diante já não podemos usar a regra de Cauchy, pois já não há indeterminação: não temos zeros no numerador, mais ainda temos um zero triplo no denominador. Conclusão: estamos perante um polo de ordem 3.

Uma terceira estratégia será usar diretamente a série de potências (basta usarmos potências com expoentes menores que 4, pois só essas, quando canceladas com o z^4 em denominador, ficam com expoente negativo). Temos

$$\begin{aligned}\frac{e^z - 2\cos z + 1}{z^4} &= \frac{\bigl(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots\bigr) - 2\bigl(1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots\bigr) + 1}{z^4} \\ &= \frac{z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{3/2}{z^2} + \frac{1/6}{z} + \cdots,\end{aligned}$$

mostrando-nos diretamente que o polo tem ordem 3.

E qual é o resíduo de f em $z = 0$? Podemos obtê-lo diretamente a partir da série: é $1/6$. Mas também podemos usar a fórmula de Cauchy:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{\overbrace{e^z - 2\cos z + 1}^{g(z)}}{z^4}\,\mathrm{d}z = \frac{\overbrace{(e^z - 2\sin z)}^{g^{(3)}(z)}{}_{z=0}}{3!} = \frac{1}{6}.$$

(6.5) Para um exemplo mais difícil, consideremos

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1 - \cos z}.$$

Não é imediatamente claro que tipo de singularidade temos em $z = 0$. Porém, podemos observar que a série de potências de $\cos z$ começa com $1 - \frac{1}{2}z^2$. Assim, seria natural dizer

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{1 - \cos z} \approx \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{2}z^2)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

e concluir que temos um polo de ordem 2. Este raciocínio pode ser tornado mais rigoroso. Podemos dizer que

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots = 1 + z^2 \underbrace{\Bigl(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots\Bigr)}_{g(z),\ \text{com } g(0) = -\frac{1}{2}},$$

e portanto

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1 - \cos z} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1 - (1 + z^2\, g(z))} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2\, g(z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1/g(z)}{z^2} = \frac{1 + 1/g(z)}{z^2}.$$

Como o numerador é não-nulo em $z = 0$ (pois $1 + 1/g(0) = 1 - 2 = -1$), concluímos que se trata de um polo de ordem 2. Se chamarmos $h(z) = 1 + 1/g(z)$ ao numerador, podemos então dizer (usando a série de Taylor) que

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^2} = \frac{h(0) + h'(0)z + \cdots}{z^2} = \frac{h(0)}{z^2} + \frac{h'(0)}{z} + \cdots$$

e constatar que o resíduo é $h'(0)$. Como $h'(z) = -g'(z)/g(z)^2$ e a série de g mostra que $g'(0) = 0$, vemos que $h'(0) = 0$. Alternativamente, podíamos observar que a série de g só tem expoentes pares, logo g é uma função par, logo h também é par, logo a série de h também só pode ter expoentes pares, logo $h'(0) = 0$.

(6.6) *Exercício.* Fixamos

$$f : z \mapsto \frac{e^z - \cos z}{z^3} \quad \text{e} \quad g : z \mapsto \frac{e^z - \cos z - \sin z}{z^3}.$$

Qual a ordem do polo de f em $z = 0$? Qual o resíduo respetivo? E para g?

(6.7) *Exercício.* Mostrem que se h tem um polo simples em $z = a$, então

$$\operatorname*{Res}_{z=a} h(z) = \lim_{z \to a} \Big((z-a)\, h(z) \Big)$$

(o mesmo limite que usamos para mostrar que o polo tem ordem 1). Usem essa observação para calcular os resíduos dos quatro polos de

$$h : z \mapsto \frac{z^2+1}{z^4+1}.$$

(6.8) *Exercício.* Classifiquem as singularidades (no caso dos polos, isto inclui determinar a ordem) destas funções, e determinem os respetivos resíduos. Para os resíduos, notem que umas vezes é mais prático usar a fórmula de Cauchy, outras vezes é mais prático determinar as séries de potências (usando, se necessário, frações parciais).

(a) $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$; (b) $z \mapsto \dfrac{1}{(z-2)(z+3)^2}$; (c) $z \mapsto \dfrac{z+\sqrt{2}}{(z^4-4)(z+i)^2}$;

(d) $z \mapsto \dfrac{iz}{z^2-3}$; (e) $z \mapsto \dfrac{1+z+z^2}{z^4-1}$; (f) $z \mapsto \dfrac{2}{z} - \dfrac{3}{z-1} + \dfrac{4}{z+1}$;

(g) $z \mapsto \dfrac{e^z}{z^2-z}$; (h) $z \mapsto \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{2}{z-i}$; (i) $z \mapsto \dfrac{z^3+1}{(z+1)^2(z^2-z)}$;

(j) $z \mapsto \dfrac{1}{2z+1}$; (k) $z \mapsto \dfrac{-4z+5}{(z^2+5z)\,z}$; (l) $z \mapsto \dfrac{3z+iz-4i-2}{(z-2)(z-i)}$;

(m) $z \mapsto \dfrac{1}{z\,(1-z)}$; (n) $z \mapsto \dfrac{3z^3-z-1}{z^2(z+1)^2}$; (o) $z \mapsto \dfrac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}$

(p) $z \mapsto \dfrac{z+2}{(z-1)^2}$; (q) $z \mapsto \dfrac{2z+\frac{i}{2}-6}{(z-2)(z-3)}$; (r) $z \mapsto \dfrac{(3z-1)\sin(\pi z)}{z^3-2z^2+z}$;

(s) $z \mapsto \dfrac{e^{\pi z i/2}}{z^2}$; (t) $z \mapsto \dfrac{-4z+3}{z\,(z-i)(2z+1)^2}$; (u) $z \mapsto \dfrac{z^2+(i-4)z+1}{z^3-2z^2+z}$;

(v) $z \mapsto \dfrac{2z-1}{(z-1)^2 z}$; (w) $z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2 z}$; (x) $z \mapsto \dfrac{3z+iz+3+3i}{z^2-2z+1-2i}$;

(y) $z \mapsto \dfrac{iz-z-i}{z^4-z^3}$ (z) $z \mapsto \dfrac{3z-1}{z^3-2z^2+z}$; (aa) $z \mapsto \dfrac{z-4}{3z^2-10iz+8}$;

(ab) $z \mapsto \dfrac{\sin z}{z^2}$; (ac) $z \mapsto \dfrac{z^2+e^z+\cos z}{z^3+2z^2+z}$; (ad) $z \mapsto \dfrac{z^5-z^2+\sin z}{(z-\pi)^4}$;

(ae) $z \mapsto \dfrac{e^z}{(z-4)\,z^2}$; (af) $z \mapsto \dfrac{5z+2iz-4i+10}{(z-2i)(z^2+2z-2iz-4i)}$;

(ag) $z \mapsto \dfrac{e^z\, z}{(z-1)^{10}}$; (ah) $z \mapsto \dfrac{e^z \sin(\pi z)}{(z-3)(2z-1)}$.

Notem que já nos cruzámos com muitas destas funções em exercícios anteriores.

(6.9) *Exercício.* Vejamos um exemplo de singularidade essencial. Considerem a função

$$f : z \mapsto \sin\Big(\frac{1}{3-z}\Big).$$

Quando for útil, usem a substituição $w = 1/(z-3)$.

(a) Mostrem que é possível escolher sucessões $w_n \to \infty$ (podem usar só números reais, se preferirem) com valores diferentes de $\lim_{n\to\infty} \sin w_n$. A partir dessas sucessões, mostrem que é possível escolher sucessões $z_n \to 3$ com valores diferentes de $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$.

(b) Podem concluir que f tem uma singularidade essencial em $z = 3$?

(c) Qual a série de potências de w para $\sin(-w)$? A partir dela, construam uma série de potências de $(z-3)$ para f. Qual o coeficiente do expoente -1 nessa série? Qual o resíduo de f em $z = 3$?

(6.10) *Exercício.* Suponham que Ω é um aberto e que f é uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{a\}$ com uma singularidade essencial em a. Mostrem que

$$f(z) = g(z) + h\Big(\frac{1}{z-a}\Big),$$

onde g é holomorfa em a, h é holomorfa em 0, e h não é um polinómio nem uma função racional.

(6.11) *Exercício.* Suponham que f tem uma singularidade essencial em $z = a$ e que g tem um polo ou singularidade removível em $z = a$.

(a) Mostrem que $z \mapsto f(z) + g(z)$ também tem uma singularidade essencial em $z = a$.

(b) Mostrem que $g(z) = (z-a)^\ell h(z)$ para algum inteiro ℓ e alguma função holomorfa h com $h(a) \neq 0$.

(c) Mostrem que $z \mapsto (z-a)^\ell f(z)$ também tem uma singularidade essencial em $z = a$.

(d) Mostrem que $z \mapsto \big((z-a)^\ell f(z)\big)\, h(z)$ não tem limite quando $z \to a$.

(e) Concluam que $z \mapsto f(z)\, g(z)$ também tem uma singularidade essencial em $z = a$.

(6.12) *Exercício.* Suponham que a é um ponto no aberto Ω, e que temos uma sucessão de termos $u_n \in \Omega \setminus \{a\}$ convergente para a. Seja f uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{a\}$, não constante, e com uma singularidade em a.

(a) Mostrem que se $f(u_n) = 0$ (para cada n), então f tem uma singularidade essencial em a. (Usem o princípio da identidade para mostrar que a singularidade não é removível. Depois mostrem que também não pode ser um polo.)

(b) Mostrem que se $b \in \mathbb{C}$ e $f(u_n) = b$ (para cada n), então f tem uma singularidade essencial em a. (Usem a função $z \mapsto f(z) - b$.)

(c) Mostrem que se f tem um polo em cada u_n, então f tem uma singularidade essencial em a. (Usem a função $z \mapsto 1/f(z)$.) Faz sentido dizer que a é uma singularidade isolada?

(6.13) *Exercício.* Classifiquem as singularidades das seguintes funções e determinem os respetivos resíduos. Notem que por vezes é mais fácil usar uma série de Laurent centrada num

ponto que não é singularidade, ou com região de convergência contornando várias singularidades. (Na alínea (b), não se preocupem se não conseguirem calcular o resíduo em $z = 0$.) Notem também que algumas funções têm um número infinito de singularidades.

(a) $z \mapsto z^4 e^{1/z}$;
(b) $z \mapsto \dfrac{e^{1/z}}{z-1}$;
(c) $z \mapsto \dfrac{1}{\sin z}$;
(d) $z \mapsto \dfrac{z}{\cos z - 1}$;
(e) $z \mapsto \dfrac{2}{e^z - 1}$;
(f) $z \mapsto \dfrac{2}{e^{2z} - 2i}$;
(g) $z \mapsto \dfrac{8}{4\cos z - 3i}$;
(h) $z \mapsto \dfrac{e^{\pi z}}{z^2 + 9}$;
(i) $z \mapsto \dfrac{1 + z + z^2}{i + z + z^2}$;
(j) $z \mapsto \dfrac{1}{z + \pi} + \dfrac{1}{\sin z}$;
(k) $z \mapsto \cot(\pi z)$;
(l) $z \mapsto \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z^2 - 1}$;
(m) $z \mapsto \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^2 + z^3}$;
(n) $z \mapsto \dfrac{\log z}{z^4 + 1}$;
(o) $z \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{z}}{z^4 + 1}$.

(Nas duas últimas alíneas, escolham ramos específicos do logaritmo e da raíz cúbica.)

(6.14) SINGULARIDADES EM ∞. Também estamos interessados no comportamento de funções na vizinhança de ∞. *Sempre* que discutirmos funções "na vizinhança de ∞", ou singularidades de funções em ∞, vamos assumir (sem voltar a mencioná-lo) que o domínio da função inclui, para algum $R > 0$, o conjunto $\{z : |z| \geq R\}$.

Dizemos que a função f tem uma singularidade removível em ∞ se $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$, onde $a \in \mathbb{C}$. Dizemos que f tem um polo em ∞ se $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ e que o polo tem ordem k se $z \mapsto f(z)/z^k$ tem uma singularidade removível em ∞. Dizemos que f tem uma singularidade essencial em ∞ se $\lim_{z\to\infty} f(z)$ não existe.

Queremos que o teorema dos resíduos continue válido. Portanto, se f for holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$, queremos que

$$-\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

se mantenha válida. (Notem que percorremos o caminho no sentido negativo, pois trata-se do bordo de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$.) Portanto, chamamos resíduo de f em ∞ ao único valor que permite satisfazer essa identidade.

(6.15) *Exercício.* Suponham que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\,(z-a)^n$$

é a série de potências para f convergente numa vizinhança de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$. Mostrem que $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -u_{-1}$. (Confirmem usando a mudança de variável $z = 1/w$. Atenção.)

(6.16) *Exercício.* Suponham que f é holomorfa em $\mathbb{C}$ exceto num número finito de singularidades isoladas. Mostrem que a soma de todos os resíduos (incluindo em ∞) é 0.

(6.17) *Exercício.* Para cada função em (6.8), classifiquem a singularidade em ∞ e determinem o respetivo resíduo.

(6.18) UMA FUNÇÃO MEROMORFA no aberto Ω é uma função holomorfa em quase todos os pontos de Ω, com todas as exceções sendo singularidades removíveis ou polos. Por exemplo,

$$z \mapsto \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z} \quad \text{e} \quad z \mapsto \frac{z}{\cos z - 1}$$

são funções meromorfas em $\mathbb{C}$, enquanto que

$$z \mapsto \frac{\log z}{z^4+1}$$

não é meromorfa em $\mathbb{C}$ (porquê?) mas *é* meromorfa em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ (porquê? o que muda?). Uma função f é meromorfa em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (a esfera de Riemann) se for meromorfa em $\mathbb{C}$ e em ∞ tiver uma singularidade removível ou um polo (ou seja, $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existe, mesmo que seja ∞).

(6.19) *Exercício.* Quais das funções em (6.13) são meromorfas em $\mathbb{C}$? Quais são meromorfas em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$?

(6.20) *Exercício**. Suponham que f é uma função não constante e meromorfa em $\mathbb{C}$, e que existe um valor $a \in \mathbb{C}$ que ocorre num número infinito de pontos u_n (isto é, $f(u_n) = a$ em cada u_n).

(a) Mostrem que u_n não tem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$ e é ilimitada.

(b) Mostrem que f tem uma singularidade essencial em ∞.

(c) Concluam que f não pode ser um polinómio nem uma função racional.

(6.21) *Exercício.* Seja Ω um aberto limitado cujo bordo $\partial\Omega$ consiste num número finito de caminhos regulares, e f uma função não constante e meromorfa em Ω.

(a) Mostrem que f tem um número finito de zeros.

(b) Mostrem que $z \mapsto 1/f(z)$ tem zeros nos pontos onde f tem polos, e que f tem um número finito de polos.

(c) Mostrem que f pode ser escrita como

$$f(z) = \frac{(z-\alpha_1)^{m_1}\cdots(z-\alpha_M)^{m_M}}{(z-\beta_1)^{n_1}\cdots(z-\beta_M)^{n_N}} \cdot g(z),$$

onde α_i são os zeros de f (com multiplicidade m_i, respetivamente), β_i são os polos de f (de ordem n_i, respetivamente), e g é holomorfa em Ω (ou só tem singularidades removíveis).

(d) Mostrem que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{m_M}{z-\alpha_M} - \frac{n_1}{z-\beta_1} - \cdots - \frac{n_N}{z-\beta_N} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

(e) Mostrem o *princípio do argumento*: se f é meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa e não-nula ao longo de $\partial\Omega$, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = (m_1 + \cdots + m_M) - (n_1 + \cdots + n_N).$$

Ou seja, obtemos o número de zeros (contados com as respetivas multiplicidades) menos o número de polos (contados com as respetivas ordens) de f em Ω.

(6.22) *Exercício.* Suponham que f é uma função não constante e meromorfa em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(a) Mostrem que f tem um número finito de zeros e um número finito de polos.

(b) Mostrem que f tem pelo menos um polo.

(c) Se $a \in \mathbb{C}$, mostrem que existe pelo menos um ponto $z \in \Omega \cup \{\infty\}$ com $f(z) = a$. (Usem a função $g : z \mapsto 1/(f(z) - a)$.)

(d) Concluam que f é uma função racional e que todas as funções racionais (não constantes) tomam todos os valores em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pelo menos uma vez.

(e) Qual é a conclusão mais forte que podem tirar sobre a imagem de $\mathbb{C}$ por f? Conseguem usá-la para provar o teorema fundamental da álgebra?

(6.23) TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS. Consideremos agora uma bijeção holomorfa $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Já vimos que f tem de ser uma função racional. Se tivesse mais do que um zero, claramente não poderia ser bijetiva; o mesmo se passaria se tivesse mais do que um polo. Portanto, podemos escrever

$$f(z) = C\,\frac{(z-\alpha)^m}{(z-\beta)^n},$$

onde $C \neq 0$ é uma constante, $m \geq 0$ (se $m = 0$, temos $f(\beta) = \infty$) e $n \geq 0$ (se $n = 0$, temos $f(\infty) = \infty$), mas nunca $m = n = 0$ ou $\alpha = \beta$. É possível mostrar (mas não vamos fazê-lo), que se $m > 1$ ou $n > 1$, a função não pode ser bijetiva.

Significa isto que podemos escrever f na forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Além disso, dados $z, w \in \mathbb{C}$ (com $cz + d \neq 0$ e $cw + d \neq 0$), a equação $f(z) = f(w)$ é equivalente, depois de simplificada, a $(ad - bc)z = (ad - bc)w$ (verifiquem). Para que f seja injetiva, ou seja, para que $f(z) \neq f(w)$ quando $z \neq w$, é preciso que $ad - bc \neq 0$. (É até possível escolher $ad - bc = 1$. Conseguem fazê-lo?)

Como queremos que f seja uma bijeção contínua $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, temos de esclarecer o que se passa em $z = \infty$ ou em $f(z) = \infty$. Como f deve ser contínua, usamos limites para calcular o valor de f nas suas singularidades. Se $c = 0$, o denominador simplifica-se e f é um polinómio de primeiro grau; neste caso, pomos $f(\infty) = \infty$. Se $c \neq 0$, pomos $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$ e $f(-\frac{d}{c}) = \lim_{z\to-\frac{d}{c}} f(z) = \lim_{z\to-\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty$.

(6.24) *Exercício.* Dadas duas transformações de Möbius

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

mostrem que

$$(f \circ g)(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}, \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Mostrem que as matrizes elementares correspondem a transformações das formas $z \mapsto az$, $z \mapsto \frac{1}{cz+d}$, ou $z \mapsto az + b$. Concluam que todas as transformações de Möbius podem ser obtidas por composição de funções das formas $z \mapsto az$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, e $z \mapsto z + b$.

(6.25) *Exercício.* Queremos mostrar que dados três pontos distintos $A, B, C \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e três valores distintos $D, E, F \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, há exatamente uma transformação de Möbius $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ com $f(A) = D$, $f(B) = E$, e $f(C) = F$.

(a) Se $A = 0$, $B = 1$, e $C = F = \infty$, mostrem que é possível escrever $f(z) = az + b$ e determinem a e b a partir de D e E. Se $C = \infty$ e $F \neq \infty$, mostrem que $c \neq 0$.

(b) Se $A = 0$, $B = 1$, $C = \infty$, e $D = \infty$, mostrem que é possível escrever $f(z) = a + \frac{b}{z}$ e determinem a e b a partir de E e F. Se $A = 0$ e $D \neq \infty$, mostrem que $d \neq 0$.

(c) Se $A = 0$, $B = 1$, $C = \infty$, e $E = \infty$, mostrem que é possível escrever $f(z) = \frac{az+b}{z-1}$ e determinem a e b a partir de D e F.

(d) Se $A = 0$, $B = 1$, $C = \infty$, e $D, E, F \neq \infty$, mostrem que é possível escrever $f(z) = \frac{az+b}{z+d}$ e determinem a, b, e d a partir de D, E, e F.

(e) Mostrem que existe uma transformação de Möbius g com $g(0) = A$, $g(1) = B$, e $g(\infty) = C$, e outra transformação h com $h(0) = D$, $h(1) = E$, e $h(\infty) = F$. Conseguem construir f a partir de g e h?

(6.26) *Exercício.* Mostrem que

$$\operatorname{Re}\bigl(A|z|^2 + Bz + C\bigr) = 0,$$

onde $A, C \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{C}$, é a equação de uma reta, ou de uma circunferência, ou de um ponto, ou do conjunto vazio. (Pode ser mais fácil escrever B e z em forma cartesiana e simplificar.) Mostrem que todas as retas e todas as circunferências têm uma equação dessa forma.

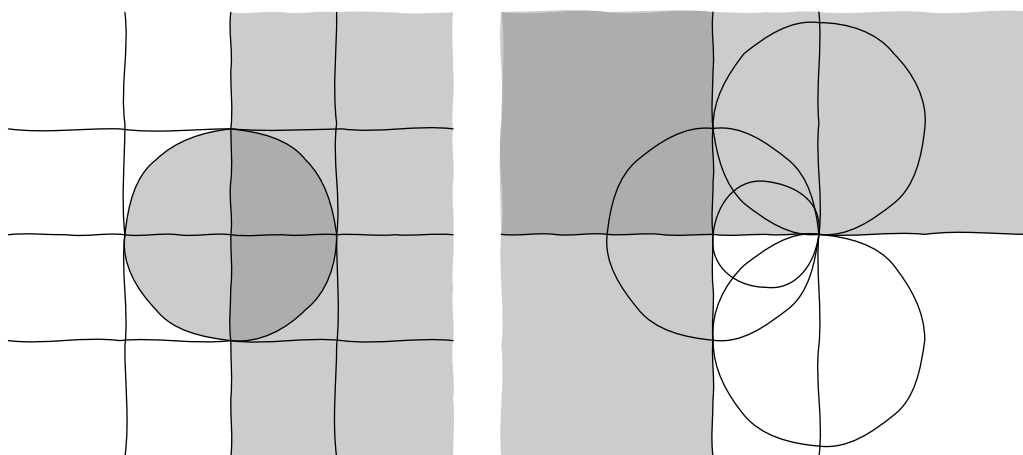
(6.27) *Exercício.* Mostrem que $z \mapsto \frac{1}{z}$ transforma retas ou circumferências noutras retas ou circumferências (considerando que o ponto ∞ está em todas as retas). Tendo em conta a conclusão do exercício (6.24), mostrem que qualquer transformação de Möbius converte qualquer reta ou circumferência noutra reta ou circumferência.

(6.28) *Exercício.* Considerem a transformação de Möbius

$$g : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}.$$

Calculem $g(0)$, $g(1)$, $g(i)$, $g(-1)$, $g(-i)$, e $g(\infty)$. Tendo em conta a conclusão do exercício anterior e que três pontos distintos determinam uma circunferência ou uma reta, quais as imagens por g dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$? (Consideramos o ponto ∞ como ponto das retas, mas não dos abertos limitados por retas.)

(a) $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$; (b) $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$; (c) $\{z : |z| = 1\}$;
(d) $\{z : \operatorname{Re} z = -1\}$; (e) $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$; (f) $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$;
(g) $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$; (h) $\{z : \operatorname{Im} z = -1\}$; (i) $\{z : \operatorname{Im} z = 1\}$;
(j) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$; (k) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; (l) $\{z : |z| < 1\}$;
(m) $\{yi : y < -1\}$; (n) $\{yi : -1 < y < 1\}$; (o) $\{yi : y > 1\}$.

Notem que como g é uma transformação conforme, curvas tangentes são transformadas em curvas tangentes e curvas perpendiculares são transformadas em curvas perpendiculares. Além disso, retas paralelas correspondem a curvas tangentes em ∞ (!).

(6.29) SINGULARIDADES NÃO ISOLADAS. Embora a situação seja bastante menos arrumada, vale a pena mencionar de passagem alguns exemplos de singularidades não isoladas.

No exercício (6.12) vimos que se f é não constante e holomorfa no aberto $\Omega \setminus \{a\}$ e existe uma sucessão $u_n \to a$ com $f(u_n) = 0$, então f tem uma singularidade essencial em a. Nesse caso, $g = 1/f$ tem um polo em cada u_n, e a já não é uma singularidade isolada. Podemos considerar, por exemplo, $z \mapsto 1/\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

No episódio 3, vimos não é possível definir logaritmos e raízes complexas sem escolher ramos (e assim remover partes de $\mathbb{C}$ do domínio da função). Uma tal situação é frequentemente resultado de tentar primitivar uma função num conjunto em que alguns caminhos contornam singularidades com resíduo diferente de 0. Por exemplo, $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ tem uma singularidade em $z = 0$ com resíduo 1. Se removermos $]-\infty, 0]$ e considerarmos apenas $\{z \in \mathbb{C} : z \notin\,]-\infty, 0]\}$ para o domínio de f, deixa de ser possível um caminho contornar singularidades, e portanto f é primitivável (o ramo principal do logaritmo é uma primitiva).

A mesma ideia pode ser aplicada noutros casos. Suponham que f é holomorfa em Ω, mas há caminhos em Ω que contornam singularidades com resíduo não-nulo. Se conseguirmos cortar pedaços de Ω, obtendo um domínio Ω' mais reduzido que não contém esses caminhos, então o integral de f é 0 ao longo de todos os caminhos fechados contidos em Ω' e o exercício (4.8) permite-nos concluir que f é primitivável em Ω'.

Por exemplo, fixemos $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Uma função f pode perfeitamente ser holomorfa em Ω e ter polos ou singularidades essenciais em i e $-i$, ambas com resíduo 0. (Criem exemplos.) Uma tal f é sempre primitivável (quais as primitivas dos vossos exemplos?). Noutros casos, pode ser necessário "cortar" Ω. Para impedir que qualquer das singularidades seja contornada, $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0 \text{ ou } |\operatorname{Im} z| < 1\}$ é uma opção razoável (há outras). Já uma escolha como $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0 \text{ ou } |\operatorname{Im} z| > 1\}$ não impede que as singularidades sejam contornadas, mas assegura que o são com o mesmo índice; isto funciona, por exemplo, se a soma dos resíduos for 0.

(6.30) *Exercício.* Considerem a função dada por

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$$

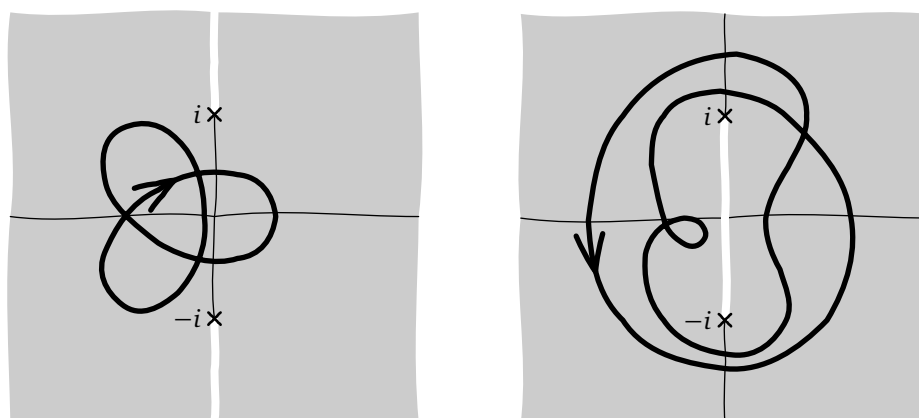
e a função g do exercício (6.28).

(a) Qual seria uma expressão natural para uma primitiva de f? (Não se preocupem para já com ramos do logaritmo.) Podem simplificá-la?

(b) Qual o integral de f ao longo de caminhos fechados contidos em Ω_1 ou em Ω_2?

(c) Qual a imagem de Ω_1 por g? Escolham um ramo do logaritmo definido em $g(\Omega_1)$, e usem-no para mostrar que $h : z \mapsto \frac{i}{2}\log(g(z))$ é uma primitiva de f em Ω_1. Qual o valor de $h(0)$? Qual a relação entre $h(z)$ e $\arctan z$?

(d) Qual a imagem de Ω_2 por g? Determinem uma primitiva de f em Ω_2.

(e) Alguma destas primitivas coincide com $\frac{i}{2}\log(z+i) - \frac{i}{2}\log(z-i)$? O que pode correr mal? (O exercício (3.28) pode ser relevante.)

(6.31) *Exercício.* Os cortes podem ser necessários por outras razões. Considerem agora a função $f : z \mapsto \sqrt{g(z)}$, onde g é a função do exercício (6.28). Será possível escolher um ramo da raiz quadrada de modo a que f seja holomorfa?

(a) Construam um caminho contornando apenas $-i$, e mostrem que não é possível escolher um ramo da raiz quadrada de modo a que f seja contínua ao longo desse caminho.

(b) Qual a imagem de Ω_1 por g? Qual o ramo da raiz quadrada que pode ser definido nessa imagem? Para esse ramo, quais os valores de $f(1)$ e de $f(-1)$?

(c) Qual a imagem de Ω_2 por g? Qual o ramo da raiz quadrada que pode ser definido nessa imagem? Para esse ramo, quais os valores de $f(1)$ e de $f(-1)$?

(d) Podemos dizer que $f(z) = \sqrt{z+i}/\sqrt{z-i}$? O exercício (3.27) pode ser relevante.

(6.32) *Exercício.* Suponham que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n$$

tem raio de convergência $R > 0$ e converge em todos os pontos da fronteira $\{z : |z-a| = R\}$ da região de convergência. Suponham ainda que a função f é holomorfa num aberto Ω contendo $\{z : |z-a| \le R\}$ e coincide com essa série na sua região de convergência. Mostrem que f tem singularidades *não* isoladas.

(6.33) RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS.

(6.6) 2; 1; 1; 1.

(6.7) singularidades em $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (resíduo $-\frac{\sqrt{2}i}{4}$) e em $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (resíduo $\frac{\sqrt{2}i}{4}$).

(6.8) (a) polo de ordem 1 em $-i$ (resíduo $\frac{i}{2}$); polo de ordem 1 em i (resíduo $-\frac{i}{2}$).
(b) polo de ordem 1 em 2 (resíduo $\frac{1}{25}$); polo de ordem 2 em -3 (resíduo $-\frac{1}{25}$).
(c) singularidade removível em $-\sqrt{2}$ (resíduo 0); polos de ordem 1 em $\sqrt{2}$ (resíduo $\frac{1-2\sqrt{2}i}{36}$), em $\sqrt{2}i$ (resíduo $\frac{1-i}{8(2\sqrt{2}+3)}$) e em $-\sqrt{2}i$ (resíduo $\frac{1+i}{8(3-2\sqrt{2})}$); polo de ordem 2 em $-i$ (resíduo $-\frac{7}{9}-\frac{4\sqrt{2}}{9}i$).
(d) polos de ordem 1 em $\sqrt{3}$ (resíduo $\frac{i}{2}$) e em $-\sqrt{3}$ (resíduo $\frac{i}{2}$).
(e) polos de ordem 1 em 1 (resíduo $\frac{3}{4}$), i (resíduo $-\frac{1}{4}$), -1 (resíduo $-\frac{1}{4}$), e $-i$ (resíduo $-\frac{1}{4}$).
(f) polos de ordem 1 em 0 (resíduo 2), 1 (resíduo -3), e -1 (resíduo 4).
(g) polos de ordem 1 em 0 (resíduo -1) e em 1 (resíduo e).
(h) polos de ordem 1 em 2 (resíduo 1) e em i (resíduo 2).
(i) polos de ordem 1 em -1 (resíduo $\frac{3}{2}$), 1 (resíduo $\frac{1}{2}$), e 0 (resíduo -1).
(j) polo de ordem 1 em $-\frac{1}{2}$ (resíduo $\frac{1}{2}$).
(k) polo de ordem 1 em -5 (resíduo 1); polo de ordem 2 em 0 (resíduo -1).
(l) polos de ordem 1 em i (resíduo $i+1$) e em 2 (resíduo 2).
(m) polos de ordem 1 em 0 (resíduo 1) e em 1 (resíduo -1).
(n) polos de ordem 2 em -1 (resíduo 2) e em 0 (resíduo 1).
(o) polos de ordem 1 em -1 (resíduo $-\frac{1}{4e^2}$) e em 0 (resíduo 1); polo de ordem 2 em 1 (resíduo $\frac{e^2}{4}$).
(p) polo de ordem 2 em 1 (resíduo 1).
(q) polos de ordem 1 em 2 (resíduo $2-\frac{i}{2}$) e em 3 (resíduo $\frac{i}{2}$).
(r) singularidade removível em 0 (resíduo 0); polo de ordem 1 em 1 (resíduo -2π).
(s) polo de ordem 2 em 0 (resíduo $\frac{\pi i}{2}$).
(t) polos de ordem 1 em 0 (resíduo $3i$) e em i (resíduo i); polo de ordem 2 em $-\frac{1}{2}$ (resíduo $-4i$).
(u) polo de ordem 1 em 0 (resíduo 1); polo de ordem 2 em 1 (resíduo 0).
(v) polo de ordem 1 em 0 (resíduo -1); polo de ordem 2 em 1 (resíduo 1).
(w) polos de ordem 1 em 0 (resíduo 1) e em -1 (resíduo $-\frac{1}{4}$); polo de ordem 2 em 1 (resíduo $-\frac{3}{4}$).
(x) polos de ordem 1 em $2+i$ (resíduo 4) e em $-i$ (resíduo $i-1$).
(y) polo de ordem 1 em 1 (resíduo -1); polo de ordem 3 em 0 (resíduo 1).
(z) polo de ordem 1 em 0 (resíduo -1); polo de ordem 2 em 1 (resíduo 1).
(aa) polos de ordem 1 em $4i$ (resíduo $\frac{2+2i}{7}$) e $-\frac{2i}{3}$ (resíduo $\frac{1}{21}-\frac{2i}{7}$).
(ab) polo de ordem 1 em 0 (resíduo 1).
(ac) polo de ordem 1 em 0 (resíduo 2); polo de ordem 2 em -1 (resíduo $1-\frac{2}{e}-\cos 1-\sin 1$).
(ad) polo de ordem 4 em π (resíduo $10\pi^2+\frac{1}{6}$).
(ae) polo de ordem 1 em 4 (resíduo $\frac{e^4}{16}$); polo de ordem 2 em 0 (resíduo $-\frac{5}{16}$).
(af) polo de ordem 1 em -2 (resíduo -1); polo de ordem 2 em $2i$ (resíduo 1).
(ag) polo de ordem 10 em 1 (resíduo $\frac{10e}{9!}$).
(ah) singularidade removível em 3 (resíduo 0); polo de ordem 1 em $\frac{1}{2}$ (resíduo $-\frac{\sqrt{e}}{5}$).

(6.9) (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}w^{2k+1}}{(2k+1)!}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!\,(z-3)^{2k+1}}$; -1; -1.

(6.13) (a) singularidade essencial em 0 (resíduo $\frac{1}{5!}$).
(b) polo de ordem 1 em 1 (resíduo e); singularidade essencial em 0 (resíduo $1-e$).
(c) polos de ordem 1 em $k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (resíduo $(-1)^k$).
(d) polo de ordem 1 em 0 (resíduo -2) e polos de ordem 2 em $k2\pi, k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$ (resíduo -2).
(e) polos de ordem 1 em $k2\pi i, k\in\mathbb{Z}$ (resíduo 2).
(f) polos de ordem 1 em $\frac{\log 2}{2}+\frac{\pi}{4}i+k\pi i, k\in\mathbb{Z}$ (resíduo $\frac{1}{2i}$).

(g) polos de ordem 1 em $i\log 2 - \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (resíduo $\frac{8}{5}$) e em $-i\log 2 + \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (resíduo $-\frac{8}{5}$).
(h) polos de ordem 1 em $3i$ (resíduo $\frac{i}{6}$) e em $-3i$ (resíduo $-\frac{i}{6}$).
(i) polos de ordem 1 em $z = -\frac{1}{2} \pm (\frac{a}{2} - \frac{i}{a})$, onde $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$ (resíduo $\frac{1-i}{2z+1}$).
(j) singularidade removível em $-\pi$ (resíduo 0); polos de ordem 1 em $k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$ (resíduo $(-1)^k$).
(k) polos de ordem 1 em $k \in \mathbb{Z}$ (resíduo $\frac{1}{\pi}$).
(l) polos de ordem 1 em 1 (resíduo $-\frac{1}{2}$) e -1 (resíduo $\frac{1}{2}$); polo de ordem 2 em 0 (resíduo 0).
(m) polo de ordem 1 em -1 (resíduo 1); polo de ordem 2 em 0 (resíduo -1).
(n) polos de ordem 1 em $\exp(\frac{\pi}{4}i + k\frac{\pi}{2}i)$ (para quatro inteiros k consecutivos, escolhidos de acordo com o ramo do logaritmo; resíduo $-\frac{(1+2k)\pi i}{16}\exp\left(\frac{\pi(1+2k)i}{4}\right)$).
(o) polos de ordem 1 em $\exp(\frac{\pi}{4}i + k\frac{\pi}{2}i)$ (para quatro inteiros k consecutivos, escolhidos de acordo com o ramo do logaritmo; resíduo $-\frac{1}{4}\exp\left(\frac{\pi(1+2k)i}{3}\right)$).

(6.17) Para as funções omitidas, a singularidade é removível (resíduo 0).
(g) singularidade essencial (resíduo $1 - e$).
(o) singularidade essencial (resíduo $\frac{1}{4e^2} - 1 - \frac{e^2}{4}$).
(r) singularidade essencial (resíduo 2π).
(s) singularidade essencial (resíduo $-\frac{\pi i}{2}$).
(ab) singularidade essencial (resíduo -1).
(ac) singularidade essencial (resíduo $-3 + \frac{2}{e} + \cos 1 + \sin 1$).
(ad) singularidade essencial (resíduo $-10\pi^2 - \frac{1}{6}$).
(ae) singularidade essencial (resíduo $-\frac{e^4}{16} + \frac{5}{16}$).
(ag) singularidade essencial (resíduo $-\frac{10e}{9!}$).
(ah) singularidade essencial (resíduo $\frac{\sqrt{e}}{5}$).

(6.19) meromorfas em $\mathbb{C}$: (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m).
meromorfas em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$: (i), (l), (m).

(6.25) (a) $a = E - D$; $b = D$.
(b) $a = F$; $b = E - F$. (c) $a = F$; $b = -D$.
(d) $a = F$; $b = \frac{F-E}{E-D}D$; $d = \frac{F-E}{E-D}$. (e) $f = h \circ g^{-1}$.

(6.28) $g(0) = -1$, $g(1) = i$, $g(i) = \infty$, $g(-1) = -i$, $g(-i) = 0$, $g(\infty) = 1$.
(a) $\{z : |z| = 1\}$. (b) $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$.
(c) $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$. (d) $\{z : |z - 1 + i| = 1\}$.
(e) $\{z : |z - 1 - i| = 1\}$. (f) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.
(g) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. (h) $\{z : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.
(i) $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$. (j) $\{z : |z| < 1\}$.
(k) $\{z : |z| > 1\}$. (l) $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.
(m) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. (n) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.
(o) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

(6.30) (a) ignorando ramos:
$\frac{i}{2}\log(z + i) - \frac{i}{2}\log(z - i) = \frac{i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}$. (b) 0.
(c) $g(\Omega_1) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, +\infty[\}$; (no ramo com $2\pi k < \operatorname{Im}\log z < 2\pi + 2\pi k$ e $k \in \mathbb{Z}$) $h(0) = -\frac{\pi}{2} - k\pi$ e $\arctan z = h(z) + \frac{\pi}{2} + k\pi$.
(d) $g(\Omega_2) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin]-\infty, 0]$ e $z \neq 1\}$; ramo com $-\pi + 2\pi k < \operatorname{Im}\log z < \pi + 2\pi k$ e $k \in \mathbb{Z}$; $z \mapsto \frac{i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}$.

(6.31) (b) $g(\Omega_1) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, +\infty[\}$; ramo com $\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$; $f(1) = e^{\pi i/4}$; $f(-1) = e^{3\pi i/4}$.
(c) $g(\Omega_2) = \{z \in \mathbb{C} : z \notin]-\infty, 0]$ e $z \neq 1\}$; ramo com $\operatorname{Re}\sqrt{z} > 0$; $f(1) = e^{\pi i/4}$; $f(-1) = e^{-\pi i/4}$.

EPISÓDIO 7

RESÍDUOS E APLICAÇÕES

Neste último episódio, depois de alguns exemplos de cálculo de integrais em $\mathbb{C}$, discutimos várias aplicações do teorema dos resíduos ao cálculo de integrais como estes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\cos(ax)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\sin(ax)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{P(x)\sqrt[k]{x}}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{P(\cos\theta,\sin\theta)}{Q(\cos\theta,\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

(com restrições que descreveremos mais à frente).

(7.1) Exemplos de integrais. Queremos calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z,$$

onde γ é um caminho contornando 0 e 1 uma vez no sentido positivo, mas que não contorna -1. Assim, vamos separar o integral em dois integrais (um para cada singularidade dentro do caminho):

$$\int_{|z|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Calculamos estes dois integrais usando a fórmula de Cauchy:

$$\int_{|z|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\overbrace{\frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2}}^{g(z)}}{\underbrace{z}_{a=0;\ n+1=1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \underbrace{1}_{g(0)} = 2\pi i,$$

$$\int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{\overbrace{\frac{e^{2z}}{z^2+z}}^{g(z)}}{\underbrace{(z-1)^2}_{a=1;\ n+1=2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \underbrace{\Bigg(\overbrace{\frac{e^{2z}\,(2z^2-1)}{(z^2+z)^2}}^{g'(z)}\Bigg)_{z=1}}_{g'(1)} = \frac{e^2\pi i}{2},$$

e concluímos que o integral original é

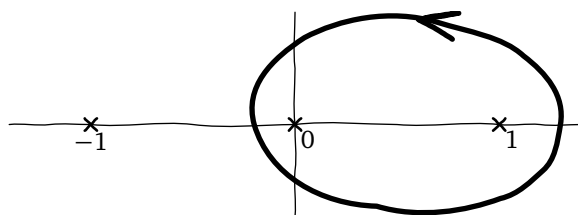
$$\int_{|z|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-1|=\varepsilon} \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i + \frac{e^2\pi i}{2}.$$

Alternativamente, podíamos começar por fazer uma decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{(z+1)(z-1)^2 z} = \cdots = \frac{-3/4}{z-1} + \frac{1/2}{(z-1)^2} - \frac{1/4}{z+1} + \frac{1}{z},$$

e substituir no integral. Ficamos com

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma -\frac{3e^{2z}/4}{z-1} + \frac{e^{2z}/2}{(z-1)^2} - \frac{e^{2z}/4}{z+1} + \frac{e^{2z}}{z}\,\mathrm{d}z,$$

$$= -2\pi i \underbrace{\frac{3e^2}{4}}_{3e^{2z}/4 \text{ em } z=1} + 2\pi i \underbrace{e^2}_{\substack{(e^{2z}/2)' \\ \text{em } z=1}} + 0 + 2\pi i \underbrace{1}_{\substack{e^{2z} \\ \text{em } z=0}} = \frac{e^2\pi i}{2} + 2\pi i.$$

(7.2) *Exercício.* Mantemos o caminho γ do exemplo anterior. Calculem os integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$; (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z i/2}}{z^2}\,\mathrm{d}z$; (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z-1}{(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z$;

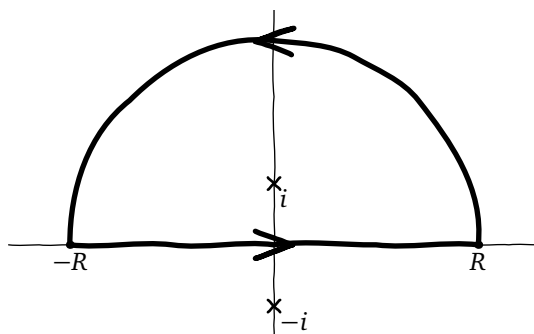
(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z+1)(z-1)^2 z}\,\mathrm{d}z$; (e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z-1}{z^3-2z^2+z}\,\mathrm{d}z$; (f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(3z-1)\sin(\pi z)}{z^3-2z^2+z}\,\mathrm{d}z$;

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+(i-4)z+1}{z^3-2z^2+z}\,\mathrm{d}z$; (h) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+e^z+\cos z}{z^3+2z^2+z}\,\mathrm{d}z$; (i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{iz-z-i}{z^4-z^3}\,\mathrm{d}z$.

(7.3) Integrais reais em $]-\infty,+\infty[$. Uma das aplicações clássicas do teorema dos resíduos é ao cálculo de integrais *reais*. Por exemplo, para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

tentamos encontrar um caminho fechado no plano complexo tão idêntico a $]-\infty,+\infty[$ quanto possível. Para o caminho ter comprimento finito, começamos por usar o segmento de $-R$ a R; isto significa que temos de verificar que tudo corre bem quando $R \to \infty$. Para ser um caminho fechado, precisamos de escolher um pedaço de curva para ligar R a $-R$.

(Aqui, é importante ter em conta que não há nenhuma razão *a priori* para escolher um caminho específico em vez de outro. Um caminho é escolhido se nos permite chegar à conclusão que queremos—em particular se nos permite lidar com $R \to \infty$. Por outro lado, depois de *alguém* descobrir uma estratégia que funcione, não é preciso reinventar a roda. As estratégias que usamos hoje são reflexo do que foi sendo descoberto, e não necessariamente do que é óbvio quando se estuda estas aplicações pela primeira vez.)

(7.4) *Exercício.* Vamos calcular

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$$

ao longo do caminho formado pelo segmento $[-R, R]$ (percorrido da esquerda para a direita) e pela metade de cima da circunferência de centro 0 e raio R (percorrida no sentido positivo), onde $R > 1$.

(a) Fatorizem $1+z^2$ para identificarem as singularidades que estão dentro do caminho.

(b) Apliquem a fórmula de Cauchy para obter o integral. A resposta depende do valor de R? O que mudava se $R < 1$?

(c) Conseguem mostrar que

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

para pontos ao longo da circunferência $|z| = R$?

(d) Combinem o resultado da alínea anterior com o do exercício (2.16) (mesmo que não tenham conseguido fazê-los) para majorar o módulo do integral ao longo da semicircunferência. Mostrem que o integral converge para 0 quando $R \to \infty$.

(e) Conseguem usar as respostas anteriores para calcular o integral impróprio real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x?$$

(7.5) *Exercício.* Mostrem que a mesma estratégia pode ser usada para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\big(\text{soma dos resíduos de } f \text{ no semiplano superior}\big),$$

quando f é uma função holomorfa em todo o plano (à exceção de um número finito de singularidades isoladas, nenhuma das quais em $\mathbb{R}$) e satisfaz (para algum $k > 1$ e alguma constante $C > 0$)

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^k}, \quad \text{para } |z| \text{ suficientemente grande.}$$

(7.6) *Exercício.* Usem essa estratégia para calcular

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4-x}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

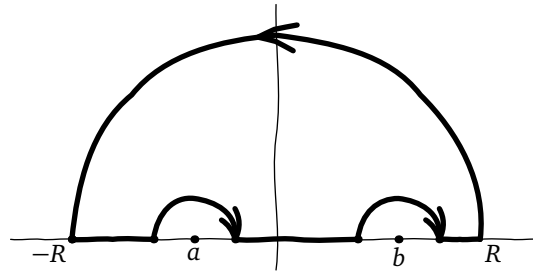
(7.7) O que fazer se a função f tiver singularidades sobre $\mathbb{R}$? A estratégia anterior pode ser facilmente adaptada ao caso em que essas singularidades são polos simples.

Se a função tem um polo simples em $a \in \mathbb{R}$, então o resíduo $\lim_{z\to a}\big((z-a)f(z)\big) = C$ é um número real diferente de 0, e na vizinhança de $z = a$ temos $f(z) = \frac{C}{z-a} + g(z)$, onde g é holomorfa em a. Como $f(x) \approx \frac{C}{x-a}$, o integral diverge em $x = a$. Portanto, se quisermos *mesmo* esse integral, a resposta não existe. Porém, em geral é razoável usar o chamado *valor principal* do integral, ou seja, usar

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \qquad \text{em vez de} \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se houver mais polos (simples), fazemos a mesmo adaptação em cada um. Por exemplo, se só houver mais um, em $b > a$, consideramos

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Naturalmente também é preciso adaptar o caminho. Usamos semicircunferências de raio ε centradas em cada um dos novos polos.

Quando $\varepsilon \to 0^+$ e $R \to \infty$, a soma dos integrais ao longo dos segmentos horizontais converge realmente para o resultado que procuramos. Resta ver qual a contribuição das novas semicircunferências.

(7.8) *Exercício.* Focamo-nos num polo de cada vez. Usando a parametrização $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C} : \theta \mapsto a + \varepsilon e^{(\pi-\theta)i}$ para a semicircunferência centrada em a, e recordando que $f(z) = \frac{C}{z-a} + g(z)$ numa vizinhança de a, mostrem que

$$\int_\gamma \frac{C}{z-a}\,\mathrm{d}z = -C\pi i, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -C\pi i.$$

Concluam que o valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

é o produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos de singularidades no semiplano superior, mas contando apenas *metade* do resíduo para os polos simples sobre $\mathbb{R}$.

(7.9) Integrais de Fourier. Vejamos um integral um pouco diferente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{aix} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{onde } a \in \mathbb{R}.$$

Se $a \geq 0$ e $y = \operatorname{Im} z \geq 0$, temos

$$|e^{aiz}| = |e^{ai(x+iy)}| = |e^{aix-ay}| = e^{-ay} \leq 1,$$

pelo que podemos ignorar a exponencial nas estimativas que fizermos.

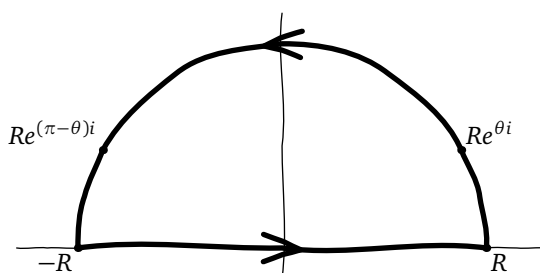
Se $a < 0$, temos $|e^{aiz}| = e^{-ay} \to \infty$ quando $y \to +\infty$, que nos impede de usar a mesma estratégia. Porém, nesse caso podemos considerar uma semicircunferência no semiplano inferior, usando portanto os resíduos das singularidades no semiplano inferior e trocando o sinal do resultado (uma vez que esta semicircunferência é percorrida no sentido negativo). Alternativamente, se $f(x)$ for uma função de valor real, podemos conjugar o integral original (que ficará agora com um coeficiente positivo na exponencial, permitindo usar a estratégia), e conjugar a resposta final.

Ainda no caso em que $f(x)$ é uma função de valor real, $\operatorname{Re}\big(e^{aix} f(x)\big) = \cos(ax) f(x)$ e $\operatorname{Im}\big(e^{aix} f(x)\big) = \sin(ax) f(x)$, que nos permite obter os valores de mais integrais.

(7.10) *Exercício.* Usem essa estratégia para calcular

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-4ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin(4x)}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$.

(7.11) *Exercício.* Vamos adaptar ligeiramente o caminho, escolhendo um ângulo θ que varia em função de R e pondo $Y = R\sin\theta$. Se f é uma função holomorfa em todo o plano

(à exceção de um número finito de singularidades isoladas, nenhuma das quais em $\mathbb{R}$) e satisfaz (para constantes positivas a, C, e k)

$$|f(z)| \leq C\,|z|^{-k}\,e^{-ay}, \quad \text{para } |z| \text{ suficientemente grande e } y = \operatorname{Im} z,$$

mostrem que para R suficientemente grande:

(a) Escolhendo $0 < \ell < 1$ e $\theta = R^{\ell-1}$, obtemos $Y = R\sin(R^{\ell-1})$. Além disso, quando $R \to \infty$, temos $YR^{-\ell} \to 1$ e $Y \to \infty$.

(b) O integral ao longo do segmento superior da semicircunferência é majorado por $\pi C R^{1-k} e^{-aY}$. Quando escolhemos θ e Y como na alínea (a), o integral converge para 0 quando $R \to \infty$.

(c) O integral ao longo dos dois segmentos inferiores da semicircunferência é majorado por $2\theta C R^{1-k}$. Quando escolhemos θ e Y como na alína (a), esse integral é majorado por $2CR^{\ell-k}$. Como escolher $0 < \ell < 1$ de forma a assegurar que o integral converge para 0 quando $R \to \infty$?

(d) Mostrem que se θ, Y, e ℓ foram escolhidos como nas alíneas anteriores, então

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \,\big(\text{soma dos resíduos de } f \text{ no semiplano superior}\big).$$

(e) Mostrem que se $a < 0$, tudo o que fizemos nas alíneas anteriores pode ser adaptado para concluirmos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \,\big(\text{soma dos resíduos de } f \text{ no semiplano inferior}\big).$$

(7.12) *Exercício.* Vamos usar essa estratégia para calcular a *transformada de Laplace inversa* de uma função f meromorfa em $\mathbb{C}$ e satisfazendo (para constantes $a \in \mathbb{R}$, $C > 0$, e $k > 0$)

$$|f(z)| \leq C\,|z|^{-k}\,|e^{-az}|, \quad \text{para } |z| \text{ suficientemente grande.}$$

Queremos calcular

$$J = \frac{1}{2\pi i} \lim_{Y\to+\infty} \int_{b-iY}^{b+iY} e^{zt} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

onde b e t são constantes reais e f não tem singularidades na reta $\operatorname{Re} z = b$.

(a) Aplicando a mudança de variável $z = b + iw$, mostrem que

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(w)\,\mathrm{d}w, \qquad \text{onde } g : w \mapsto e^{(b+iw)t} f(b+iw).$$

(b) Mostrem que existe $C' > 0$ tal que

$$|g(w)| \leq C'\,|w|^{-k}\,e^{-(t-a)y}, \quad \text{para } |w| \text{ suficientemente grande e } y = \operatorname{Im} w.$$

(c) Usem o exercício anterior para calcular J com base nos resíduos de g.

(d) Mostrem que cada singularidade w_0 de g corresponde a uma singularidade $z_0 = b + iw_0$ de f (e vice-versa), que $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = i \operatorname{Res}_{w=w_0} g(w)$, e que w_0 está no semiplano superior quando z_0 está à esquerda da reta $\operatorname{Re} z = b$.

(e) Mostrem que J é igual à soma dos resíduos de f à esquerda da reta $\operatorname{Re} z = b$ quando $t > a$, e igual ao simétrico da soma dos resíduos de f à direita dessa reta quando $t < a$.

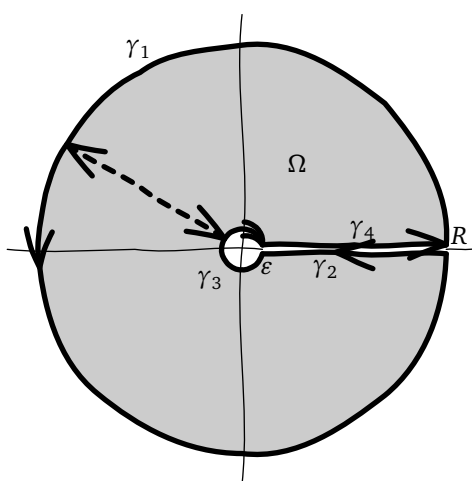
(7.13) *Exercício.* Para cada uma destas funções, calculem a transformada inversa usando $b = 2$, $b = -1$, e $b = -4$. (Pode valer a pena usar frações parciais.)

(a) $z \mapsto \dfrac{4}{z-1}$; (b) $z \mapsto \dfrac{6}{z(z+2)(z-1)}$; (c) $z \mapsto \dfrac{9}{(z-1)^2(z+2)}$;

(d) $z \mapsto \dfrac{3}{z^2 - 2z + 10}$; (e) $z \mapsto \dfrac{6e^{-4z}}{z(z+2)(z-1)}$.

(7.14) Integrais em $]0,+\infty[$ usando um contorno em fechadura. A técnica que usámos até aqui não funciona com um integral como

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x,$$

pois dependia de termos um caminho (dependente de uma variável R) com várias componentes, em cada uma das quais o integral convergia (quando $R \to \infty$) ou para o integral desejado ou para 0. Se tentássemos usar o mesmo caminho neste caso (e ignorando para já a posição das singularidades), obteríamos o integral de $-\infty$ a ∞. Como a função não é par, não há qualquer relação óbvia entre esse integral e o integral de 0 a ∞. Consideremos então um caminho diferente, por vezes chamado o contorno em fechadura.

Temos a circunferência γ_1 com raio R (que faremos tender para ∞) percorrida no sentido positivo, o segmento γ_2 de R a ε, a circunferência γ_3 com raio ε (que faremos tender para 0) percorrida no sentido negativo, e o segmento γ_4 de ε a R. (Para já ignorem o caminho a tracejado.) Em conjunto, formam o bordo γ da região Ω entre as duas circunferências, e por isso podemos aplicar o teorema dos resíduos a

$$\int_\gamma \log z\, f(z)\,\mathrm{d}z,$$

onde f é uma função holomorfa em todo o plano exceto num número finito de singularidades (nenhuma delas em $[0,+\infty[$) e $\log z$ é o ramo do logaritmo com $0 < \theta < 2\pi$. Claro que isto é problemático (sim?), pois exclui precisamente o segmento $]0,\infty[$ necessário para γ_2 e γ_4. Uma forma de evitar problemas é escolher um ângulo $0 < \eta < 2\pi$ ao longo do qual não haja singularidades (por exemplo, o caminho a tracejado), subdividir Ω nesse ângulo, e usar no setor $0 \le \theta \le \eta$ um ramo do logaritmo incluindo $0 \le \theta \le \eta$ (possível, pois este intervalo tem comprimento menor que 2π) e no setor $\eta \le \theta \le 2\pi$ um ramo do logaritmo incluindo $\eta \le \theta \le 2\pi$ (possível pela mesma razão). Veem como isto evita o problema?

Observamos agora que

$$\int_{\gamma_4} \log z\, f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \log x\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

(pois ao longo de γ_4 usamos um ramo do logaritmo com $\theta = 0$) e que

$$\int_{\gamma_2} \log z\, f(z)\, dz = -\int_{\varepsilon}^{R} (\log x + 2\pi i)\, f(x)\, dx$$

(pois ao longo de γ_2 usamos um ramo do logaritmo com $\theta = 2\pi$). Assim,

$$\int_{\gamma_2} \log z\, f(z)\, dz + \int_{\gamma_4} \log z\, f(z)\, dz = -2\pi i \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\, dx\,.$$

(7.15) *Exercício.* Assumindo que existe $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq C|z|^{-2}$ para $|z|$ suficientemente grande, mostrem que

$$\left| \int_{\gamma_1} \log z\, f(z)\, dz \right| \leq 2\pi C \frac{\log R + 2\pi}{R}$$

e concluam que o integral converge para 0 quando $R \to \infty$.

(7.16) *Exercício.* Tendo em conta que, para ε suficientemente pequeno, f é contínua numa vizinhança de 0 incluindo γ_3 (porquê?), chamem M a um majorante e mostrem que

$$\left| \int_{\gamma_3} \log z\, f(z)\, dz \right| \leq 2\pi\varepsilon\,(-\log\varepsilon + 2\pi)\, M$$

e concluam que o integral converge para 0 quando $\varepsilon \to 0$.

(7.17) Desta forma, desde que as hipóteses que fomos acumulando (f holomorfa em $\mathbb{C}$ exceto num número finito de singularidades, nenhuma das quais em $[0, +\infty[$, e $|f(z)| \leq C|z|^{-2}$ para $|z|$ suficientemente grande) se mantenham válidas, concluímos que

$$\int_{\gamma_1} \log z f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} \log z f(z)\, dz + \int_{\gamma_3} \log z f(z)\, dz + \int_{\gamma_4} \log z f(z)\, dz \to -2\pi i \int_0^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Por outro lado,

$$\int_{\gamma} \log z\, f(z)\, dz = 2\pi i\, \big(\text{soma dos resíduos de } z \mapsto \log z\, f(z)\big),$$

que nos permite concluir que

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = -\big(\text{soma dos resíduos de } z \mapsto \log z\, f(z)\big).$$

(7.18) *Exercício.* Usem esta estratégia para calcular os integrais

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$; (e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\, dx$; (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)}\, dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-2}{(x+1)^3}\, dx$.

(7.19) O contorno em fechadura também pode ser usado com outros integrais. Por exemplo, consideremos

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aqui, em vez de multiplicarmos a função por $\log x$, exploramos o facto de $z \mapsto \sqrt{z}$ (definida com base nos mesmos ramos de $z \mapsto \log z$ discutidos em (7.14)) ter valores diferentes ao longo de γ_4 e γ_2:

$$\int_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = -\int_\varepsilon^R \frac{e^{\pi i}\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

(pois ao longo de γ_4 o logaritmo usa $\theta = 0$ e portanto a raiz usa $\theta = 0$, e ao longo de γ_2 o logaritmo usa $\theta = 2\pi$ e portanto a raiz usa $\theta = \pi$). Desta forma,

$$\int_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = 2\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \to 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

(quando $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$).

(7.20) *Exercício.* Mostrem que

$$\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z$$

convergem para 0 quando $R \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$.

(7.21) Concluímos assim que, a partir do momento em que todas as singularidades estejam incluídas entre as duas circunferências, temos

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

(notem que com outras raízes a constante fora do integral não seria 2, mas sim $1 - e^{2\pi i/k}$). Falta-nos calcular os resíduos. Como $z^2 - z + 1 = (z - e^{\pi i/3})(z - e^{5\pi i/3})$ (reparem que escrevemos já as coordenadas polares com ângulos $0 < \theta < 2\pi$), temos

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/3}} \frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\pi i/3})(z-e^{5\pi i/3})} = \frac{\sqrt{e^{\pi i/3}}}{e^{\pi i/3}-e^{5\pi i/3}} = \frac{e^{\pi i/6}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}i},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{5\pi i/3}} \frac{\sqrt{z}}{(z-e^{\pi i/3})(z-e^{5\pi i/3})} = \frac{\sqrt{e^{5\pi i/3}}}{e^{5\pi i/3}-e^{\pi i/3}} = \frac{e^{5\pi i/6}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}i},$$

logo a soma dos resíduos é $1/i$ e

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\sqrt{z}}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{i} = \pi.$$

(7.22) *Exercício.* Usem a mesma estratégia para calcular

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(na última alínea, usamos $0 < \alpha < 1$).

(7.23) Integrais trigonométricos em $[0, 2\pi]$. Terminamos com mais um exemplo de integral. Para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - 4}{12\cos\theta - 13}\,\mathrm{d}\theta,$$

podemos notar que $z = e^{\theta i}$ (com $0 \le \theta \le 2\pi$) parametriza o caminho fechado $|z| = 1$ no plano complexo. Além disso, como $\mathrm{d}z = ie^{\theta i}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta$, podemos usar

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \qquad \cos\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

Desta forma, o integral original é de facto

$$\int_{|z|=1} \frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2} - 4}{12\frac{z+\frac{1}{z}}{2} - 13}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1 - 8z}{12(z^2+1) - 26z}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 8z + 1}{12z^2 - 26z + 12}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Para prosseguir, temos de fatorizar o denominador. A fórmula resolvente diz-nos que as raízes são $2/3$ e $3/2$. Assim, o denominador é $12(z - \frac{2}{3})(z - \frac{3}{2})$. Notem que temos de incluir o 12 na fatorização; de outra forma o coeficiente de z^2 seria 1 em vez de 12 (ou seja, obteríamos a fatorização de $\frac{12z^2-26z+12}{12} = z^2 - \frac{26}{12}z + 1$). Ficamos então com o integral

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 - 8z + 1}{12i\,z\,(z - \frac{2}{3})(z - \frac{3}{2})}\,\mathrm{d}z,$$

que pode ser calculado usando a fórmula de Cauchy.

(7.24) *Exercício.* Terminem o cálculo do integral.

(7.25) *Exercício.* Notem que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - 4}{12\cos\theta - 13}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{\theta i} - 4}{12\cos\theta - 13}\,\mathrm{d}\theta\right].$$

Conseguem usar isto para simplificar o cálculo do integral? Para quantas singularidades precisam de usar a fórmula de Cauchy?

(7.26) *Exercício.* Calculem estes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - 2}{\sin\theta + 2}\, d\theta$; (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - 2}{(\sin\theta + 2)^2}\, d\theta$; (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta - 3}$;

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8(\cos\theta)^2 + 1}$; (e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{8(\cos\theta)^2 + 1}\, d\theta$.

(Pode ser útil saber que $(2+i)^2 = 3 + 4i$.)

(7.27) Respostas de exercícios.

(7.2) (a) $2\pi i$. (b) $-\pi^2$. (c) 0. (d) $\frac{\pi i}{2}$. (e) 0. (f) $-4\pi^2 i$. (g) $2\pi i$. (h) $4\pi i$. (i) 0.

(7.6) (a) $\frac{\pi}{2}$. (b) $\frac{5\pi}{16}$. (c) $\sqrt{2}\pi$.

(7.10) (a) πe^{-4}. (b) πe^{-4}. (c) πe^{-4}. (d) $2\pi\cos(12)\, e^{-8} + 3\pi\sin(12)\, e^{-8}$. (e) $\frac{9}{16}\pi\cos(4)\, e^{-8}$.

(7.13) com $b = 2$: (a) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ 4e^t, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(b) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ e^{-2t} - 3 + 2e^t, & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ e^{-2t} - e^t + 3te^t, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(d) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ e^t \sin(3t), & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 0, & \text{se } t < 4, \\ e^{-2(t-4)} - 3 + 2e^{t-4}, & \text{se } t > 4. \end{cases}$
com $b = -1$: (a) $\begin{cases} -4e^t, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(b) $\begin{cases} 3 - 2e^t, & \text{se } t < 0, \\ e^{-2t}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} e^t - 3te^t, & \text{se } t < 0, \\ e^{-2t}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(d) $\begin{cases} -e^t \sin(3t), & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3 - 2e^{t-4}, & \text{se } t < 4, \\ e^{-2(t-4)}, & \text{se } t > 4. \end{cases}$
com $b = -4$: (a) $\begin{cases} -4e^t, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(b) $\begin{cases} 3 - 2e^t - e^{-2t}, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} e^t - 3te^t - e^{-2t}, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$
(d) $\begin{cases} -e^t \sin(3t), & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t > 0. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3 - 2e^{t-4} - e^{-2(t-4)}, & \text{se } t < 4, \\ 0, & \text{se } t > 4. \end{cases}$

(7.18) (a) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. (b) 1. (c) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. (d) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. (e) $2\log 2 - 1$. (f) 0. (g) $-\frac{1}{2}$.

(7.22) (a) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. (b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. (c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. (d) $\frac{\pi}{2}$. (e) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. (f) $\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

(7.24) $\frac{4\pi}{3}$.

(7.26) (a) $-\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$. (b) $-\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$. (c) $-\frac{2\pi}{5}$. (d) $\frac{2\pi}{3}$. (e) $\frac{\pi}{12}$.